*Современный*
*Гуманитарный*
*Университет*

Дистанционное образование

**0664.02.01;1**

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Юнита 2

## МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Москва 2001

Разработано Л.В. Кирьяновой, канд. физ.-мат. наук

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

# КУРС: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Юнита 1. Введение в теорию вероятностей.
Юнита 2. Многомерные распределения и предельные теоремы.
Юнита 3. Основные понятия математической статистики.
Юнита 4. Прикладная статистика.

## ЮНИТА 2

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

ISBN 5-8323-0296-6

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2000

# ОГЛАВЛЕНИЕ


стр.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН . . . . . 4
ЛИТЕРАТУРА . . . . . 5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ . . . . . 6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР . . . . . 8
Глава 1. Многомерные случайные величины (системы случайных величин) . . . . . 8
§1. Система случайных величин, функция распределения системы случайных величин . . . . . 8
§2. Зависимые и независимые случайные величины . . . . . 15
§3. Числовые характеристики зависимости (ковариация, корреляция) . . . . . 19
§4. Функции нескольких случайных аргументов. Распределение суммы независимых случайных величин . . . . . 25
Глава 2. Многомерные распределения . . . . . 32
§1. Двумерное нормальное распределение . . . . . 32
§2. Общий случай n-мерного нормального распределения . . . . . 36
§3. Функции от нормально распределенных случайных величин. Распределение хи-квадрат, Стьюдента, Снедекора-Фишера . . 38
§4. Полиномиальное распределение . . . . . 45
Глава 3. Предельные теоремы теории вероятностей . . . . . 46
§1. Неравенство Чебышева . . . . . 46
§2. Закон больших чисел . . . . . 48
§3. Характеристические функции случайных величин . . . . . 52
§4. Центральная предельная теорема . . . . . 54
§5. Скорость сходимости в центральной предельной теореме . . . . 59
Глава 4. Введение в теорию случайных процессов . . . . . 61
§1. Понятие о случайном процессе . . . . . 61
§2. Цепи Маркова . . . . . 62
§3. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем . . . . . 70
§4. Пуассоновский процесс . . . . . 75
§5. Процесс "гибели и размножения" . . . . . 77
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ . . . . . 85
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ . . . . . 92
ГЛОССАРИЙ*


* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

## ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

1. Многомерные случайные величины (системы случайных величин).

Система случайных величин, функция распределения системы случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Числовые характеристики зависимости (ковариация, корреляция). Функции нескольких случайных аргументов. Распределение суммы независимых случайных величин.

2. Многомерные распределения.

Двумерное нормальное распределение. Общий случай n-мерного нормального распределения. Функции от нормально распределенных случайных величин. Распределения хи-квадрат, Стьюдента, Снедекора-Фишера. Полиномиальное распределение.

3. Предельные теоремы теории вероятностей.

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Характеристические функции случайных величин. Центральная предельная теорема. Скорость сходимости в центральной предельной теореме.

4. Введение в теорию случайных процессов.

Понятие о случайном процессе. Цепи Маркова. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Пуассоновский процесс. Процесс "гибели и размножения".

## ЛИТЕРАТУРА


### Базовая

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1998.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М., 1988.

### Дополнительная

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1998.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей, задачи и упражнения. М., 1973.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1–2. М., 1984.
7. Прохоров Н.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М., 1987.
8. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундалевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1991.


Примечание. Тематический обзор составлен с использованием всех источников.

## ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

| № п/п | Умения | Алгоритмы |
|---|---|---|
| 1 | Вычисление плотности распределения линейной функции $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ от аргументов, подчиненных нормальному закону $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$. | 1. Вычислить математическое ожидание величины $Y$: $m_y = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b$. 2. Вычислить дисперсию величины $Y$: $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j$, где $r_{ij}$ – коэффициенты корреляции. 3. Записать плотность распределения величины $Y$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$ |
| 2 | Приближенное вычисление вероятности попадания случайной величины $X \sim Bi(n, p)$ в интервале $(k_1, k_2)$. | 1. Описать схему Бернулли в данной задаче. 2. Определить из условия задачи параметры распределения величины $X$. 3. Проверить применимость теоремы Муавра-Лапласа: $npq > 9$. 4. Вычислить искомую вероятность по формуле: $P(k_1 < X < k_2) \approx \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$. |
| 3 | Вычисление вероятностей состояний однородной цепи Маркова. | 1. Записать все состояния цепи Маркова в данной задаче. 2. Построить граф состояний. 3. Разметить граф состояний переходными вероятностями. 4. Составить матрицу вероятностей перехода. |

| № п/п | Умения | Алгоритмы |
|---|---|---|
| | | 5. Вычислить по матрице искомые вероятности. |
| 4 | Вычисление предельных вероятностей состояний процесса “гибели и размножения”. | 1. Построить граф состояний.<br>2. Разметить граф состояний плотностями вероятностей перехода.<br>3. Записать по размеченному графу состояний выражения для предельных вероятностей состояний.<br>4. Вычислить предельные вероятности состояний. |

# ГЛАВА 1. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН)

## §1. Система случайных величин, функция распределения системы случайных величин

В практических применениях теории вероятностей приходится иметь дело с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более, образующими систему или случайный вектор.

Например, расходы случайно выбранной семьи зависят от затрат на питание, обувь, одежду, транспорт, удовлетворение духовных потребностей; на урожайность данной культуры влияют погодные условия, применяемые удобрения, характер почвы, качество посевного материала и т.д.

**Случайным вектором** или **n-мерной случайной величиной** называют упорядоченный набор из $n$ случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Многомерная случайная величина, случайный вектор, система случайных величин – это все различные интерпретации одного и того же математического объекта. В зависимости от удобства изложения можно пользоваться одной или другой интерпретацией.

Многомерные случайные величины (или случайные векторы) так же, как и одномерные, могут быть как дискретные, так и непрерывные.

**Дискретный случайный вектор** – это случайный вектор, компоненты которого – дискретные случайные величины.

**Непрерывный случайный вектор** – это случайный вектор, компоненты которого – непрерывные случайные величины.

Наиболее простой случай – система, состоящая из двух случайных величин (двумерная случайная величина). Рассмотрим вначале этот случай.

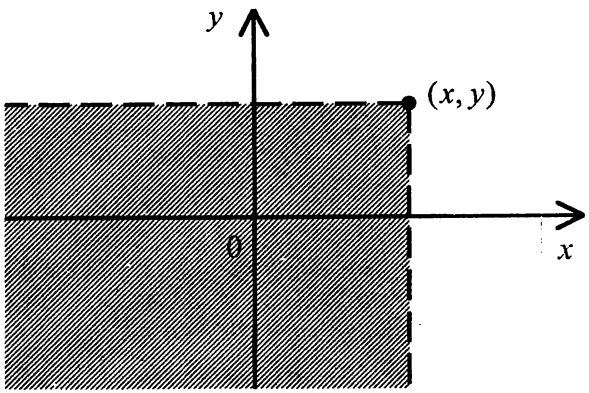
**Функцией распределения двумерной случайной величины** $(X, Y)$ называют вероятность совместного выполнения двух неравенств $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$F(x, y) = P\{X < x; Y < y\}.$$

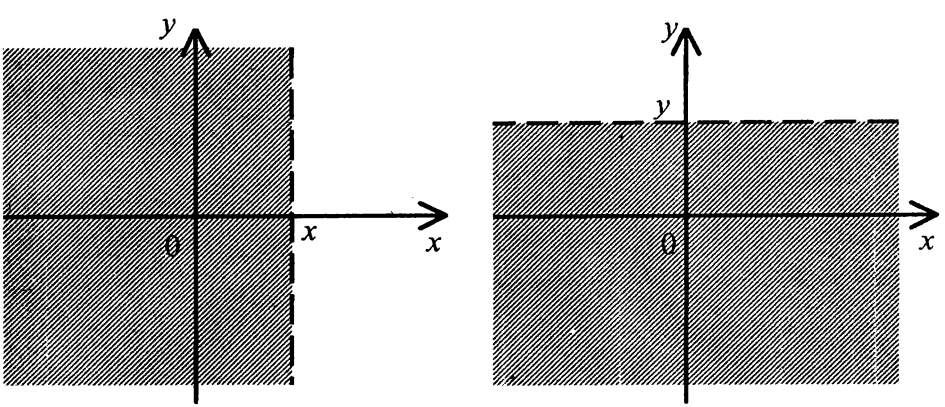
Используя геометрическую интерпретацию двумерной случайной величины как случайной точки в декартовой системе координат, можно

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

сказать, что функция распределения $F(x,y)$ есть вероятность попадания случайной точки $(X,Y)$ в бесконечный квадрат с вершиной в точке $(x,y)$, лежащий левее и ниже ее:




В аналогичной интерпретации функция распределения первой компоненты $X$ случайного вектора – обозначим ее через $F_1(x)$ – представляет собой вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную справа абсциссой $x$; функция распределения величины $Y$ – $F_2(y)$ – вероятность попадания в полуплоскость, ограниченную сверху ординатой $y$:




Сформулируем свойства функции распределения двумерной случайной величины, часть из которых аналогичны свойствам функции

распределения одномерной случайной величины.

1. Функция распределения $F(x,y)$ есть неубывающая функция своих аргументов, т.е.

$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$ при $x_2 > x_1$,

$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$ при $y_2 > y_1$.

2. Повсюду на $-\infty$ функция распределения равна нулю, т.е.:

$F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

3. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице:

$$F(+\infty,+\infty) = 1.$$

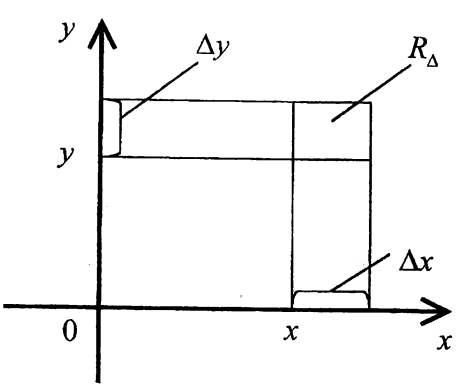
4. При одном из аргументов, равном $+\infty$, функция распределения двумерного вектора превращается в функцию распределения компоненты, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,+\infty) = F_1(x);\ F(+\infty,y) = F_2(y).$$

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин.

Распределение многомерных непрерывных величин обычно характеризуют плотностью распределения.

**Плотностью распределения двумерной непрерывной случайной величины** называют предел отношения вероятности попадания случайной величины в малый прямоугольник к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю:

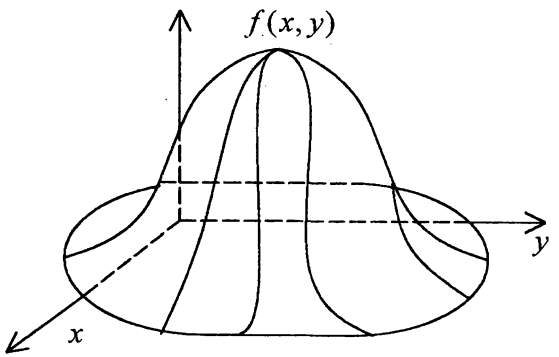



$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{(X,Y) \in R_\Delta\}}{\Delta x \Delta y}$$

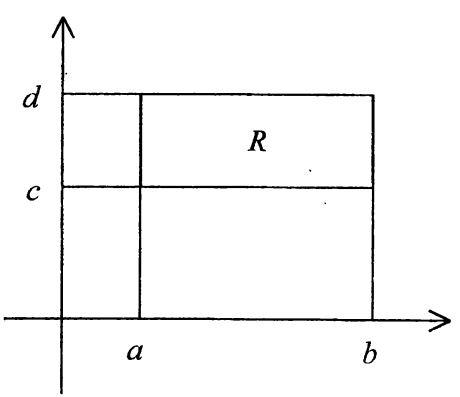
Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины вычисляется как вторая смешанная частная производная функции распределения:

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y).$$

Геометрически плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины можно изобразить некоторой поверхностью, так называемой **поверхностью распределения**. Эта поверхность аналогична кривой распределения для одномерной случайной величины:




Используя плотность распределения, можно записать формулу для вычисления вероятности попадания двумерной случайной величины $(X,Y)$ в прямоугольник $R$, ограниченный абсциссами $a$ и $b$ и ординатами $c$ и $d$:




$$P\{(X,Y) \in R\} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

Выразим теперь функцию распределения через плотность. Функция распределения $F(x,y)$ есть вероятность попадания в бесконечный

квадрат; последний можно рассматривать как прямоугольник, ограниченный абсциссами $-\infty$ и $x$ и ординатами $-\infty$ и $y$. Таким образом, имеем:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

*Свойства плотности распределения.*

1. Плотность распределения двумерного случайного вектора есть функция неотрицательная:

$$f(x,y)\geq 0.$$

Действительно, по определению плотность распределения есть предел отношения двух неотрицательных величин: вероятности попадания в прямоугольник и площади прямоугольника – и, следовательно, отрицательной быть не может.

2. Двойной интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения двумерного случайного вектора равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Действительно, написанный интеграл есть не что иное, как вероятность попадания во всю плоскость $xOy$, т.е. вероятность достоверного события.

3. Плотности распределения компонент случайного могут быть получены по формулам:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Это свойство следует из соответствующего свойства для функций распределения и формулы, связывающей функцию распределения и плотность распределения случайного вектора.

Теперь обратимся к дискретным двумерным случайным векторам.

**Закон распределения дискретного случайного вектора $(X,Y)$** – это совокупность всех возможных значений случайного вектора $(X,Y)$ и их вероятностей:

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},\quad \text{где } i=1,2,...,n;\quad j=1,2,...,m;$$

$n, m$ – число возможных значений случайных величин $X$ и $Y$, которые могут быть конечны или бесконечны.

Сумма вероятностей $p_{ij}$ по всем значениям $i$ и $j$ равна единице:

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Так же, как и в непрерывном случае, зная закон распределения случайного вектора, можно найти распределение вероятностей координат, просуммировав вероятности $\{p_{ij}\}$ по соответствующему индексу:

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij};$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

**Пример.** Качество продукции характеризуется двумя случайными величинами: $X$ и $Y$. Закон распределения случайного вектора $(X, Y)$ представлен в таблице:

| $x_i$ \ $y_j$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,05 | 0,4 |
| 6 | 0 | 0,15 | 0,15 | 0,1 | 0,4 |
| 7 | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| $p_{\cdot j}$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,25 | $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ |

На пересечении i-ой строки и j-го столбца таблицы находятся вероятности

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

Найдем закон распределения координат $X$ и $Y$ случайного вектора. Вероятность события $\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$ есть сумма вероятностей, находящихся в i-ой строке. Вероятности $p_{i\cdot}$ находятся в последнем столбце таблицы.

Ряд распределения случайной величины $X$ имеет вид:

| $x_i$ | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|
| $p_{i\cdot}$ | 0,4 | 0,4 | 0,2 |

Ряд распределения $Y$ находим, вычисляя суммы элементов столбцов таблицы. Эти вероятности $p_{\cdot j}$ находятся в последней строке таблицы.

Ряд распределения случайной величины $Y$ имеет вид:

| $y_j$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{\cdot j}$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,25 |

Перейдем теперь к системе n случайных величин или к n-мерной случайной величине.

**Функция распределения n-мерной случайной величины** – это вероятность совместного выполнения неравенств вида $\{X_i < x_i\}$:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1; X_2 < x_2; ...; X_n < x_n\}.$$

Свойства функции распределения аналогичны двумерному случаю.

Для непрерывной n-мерной случайной величины вводят понятия плотности распределения.

**Плотность распределения n-мерной случайной величины** $(X_1, X_2, ..., X_n)$ – это n-ая смешанная частная производная функции распределения $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, взятая один раз по каждому аргументу:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$$

Для дискретных n-мерных случайных величин важную роль играет закон распределения.

**Закон распределения дискретной n-мерной случайной величины** – это совокупность всех возможных значений, которые может принимать n-мерная случайная величина, и их вероятностей:

$$p_{i_1 i_2 ... i_n} = P\{X_1 = x_{i_1}; X_2 = x_{i_2}; ...; X_n = x_{i_n}\}.$$

## §2. Зависимые и независимые случайные величины

В предыдущем параграфе было показано, как, зная закон распределения системы двух случайных величин (двумерного вектора), определить законы распределения отдельных величин, входящих в систему (т.е. компонент вектора).

Естественно возникает вопрос: нельзя ли по законам распределения отдельных величин, входящих в систему, найти закон распределения системы? Оказывается, в общем случае этого сделать нельзя. Для того чтобы полностью описать систему, недостаточно знать распределение каждой из величин, входящих в систему; нужно еще знать зависимость между величинами, входящими в систему. Эта зависимость характеризуется с помощью условных законов распределения.

**Условной функцией распределения случайной величины $X$ при условии $B$** называют условную вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение меньше чем число $x$ при условии, что событие $B$ произошло:

$$F(x|B) = P\{X < x|B\}.$$

Для систем непрерывных случайных величин большую роль играют условные плотности распределения.

**Условная плотность распределения компонент непрерывного случайного вектора $(X,Y)$** – это плотность распределения одной случайной величины, вычисленная при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, т.е.

$$f_X(x \mid y_0) = \frac{f(x, y_0)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0)dx};$$

и

$$f_Y(y \mid x_0) = \frac{f(x_0, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y)dy}.$$

**Пример.** Непрерывный вектор $(X,Y)$ равномерно распределен в круге с радиусом 1, т.е.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}; & \text{если } x^2+y^2\le 1,\\ 0; & \text{если } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

Найти условные плотности распределения компонент этого вектора.

*Решение*. Вычислим сначала интегралы, стоящие в знаменателе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y_0)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y_0^2}}^{\sqrt{1-y_0^2}}dx, & \text{если } |y_0|\le 1,\\ 0; & \text{если } |y_0|>1;\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y_0^2}, & \text{если } |y_0|\le 1;\\ 0; & \text{если } |y_0|>1.\end{cases}$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x_0^2}, & \text{если } |x_0|\le 1;\\ 0; & \text{если } |x_0|>1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f_X(x|y_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y_0^2}}; & \text{если } x^2+y_0^2\le 1;\\ 0, & \text{если } x^2+y_0^2>1;\end{cases}$$

$$f_X(y|x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x_0^2}}; & \text{если } x_0^2+y^2\le 1;\\ 0, & \text{если } x_0^2+y^2>1.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим дискретный случай.

**Условное распределение компонент дискретного случайного вектора $(X,Y)$** – это ряд распределения одной случайной величины, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, а именно:

$$p_X(x_i|y_j)=P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}p_{ij}};$$

$$p_Y(y_j|x_i) = P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}};$$

где $\{p_{ij}\}_{i=1\ j=1}^{n\ \ m}$ – закон распределения $(X,Y)$.

$m,n$ – могут быть конечны или бесконечны.

**Пример.** Закон распределения дискретного случайного вектора $(X,Y)$ задан таблицей:

| $x_i$ \ $y_j$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,05 | 0,4 |
| 6 | 0 | 0,15 | 0,15 | 0,1 | 0,4 |
| 7 | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| $p_{\cdot j}$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,25 | |

Найти условное распределение случайной величины $X$ при условии, что случайная величина $Y$ приняла значение $y_2 = 0{,}1$.

*Решение.* Выбрав значения $p_{i2}$ из столбца таблицы, соответствующего значению $y_2 = 0{,}1$, и разделив их на 0,25, получаем следующее условное распределение $X$ при условии, что $Y = 0{,}1$:

| $x_i$ | 5 | 6 |
|---|---|---|
| $p_X(x_i\|y_2)$ | 0,4 | 0,6 |

При изучении систем случайных величин всегда следует обращать внимание на степень и характер их зависимости. Эта зависимость может быть более или менее ярко выражена, более или менее тесная. В некоторых случаях зависимость между случайными величинами может быть настолько тесной, что зная значение одной случайной величины, можно в точности указать значение другой. В другом крайнем случае зависимость между случайными величинами является настолько слабой, что их можно считать практически независимыми.

Перейдем к точным формулировкам.

Случайные величины $X$ и $Y$ называют **независимыми**, если события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы при любых $x$ и $y$, т.е.

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Для непрерывных независимых случайных величин плотность

распределения $(X,Y)$ равна произведению соответствующих плотностей:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

**Пример.** Плотность распределения случайного вектора $(X,Y)$ имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}.$$

Определить, зависимы или независимы случайные величины $X$ и $Y$.

*Решение.* Разлагая знаменатель на множители, имеем:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Из того, что функция $f(x,y)$ распалась на произведение двух функций, из которых одна зависит только от $x$, а другая – только от $y$, заключаем, что величины $X$ и $Y$ должны быть независимы. Действительно, применяя формулы, выражающие плотность компонент случайного вектора через плотность вектора, имеем:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\pi(1+y^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)};$$

аналогично,

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi(1+y^2)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi(1+y^2)};$$

следовательно,

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

и величины $X$ и $Y$ – независимы.

Понятие независимости можно обобщить на случай n величин.

**Случайные величины** $X_1,X_2,...,X_n$ называют **независимыми в совокупности**, если события $\{X_1<x_1\},\{X_2<x_2\},...,\{X_n<x_n\}$ независимы в совокупности при любых $(x_1,x_2,...,x_n)$.

Многие результаты, относящиеся к предельным теоремам теории вероятностей, получены в предположении, что исходные случайные величины независимы в совокупности.

Для независимых случайных величин условная функция распределения совпадает с безусловной. Действительно:

$$f_X(x|y_0)=\frac{f(x,y_0)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y_0)dx}=\frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)}=\frac{f_X(x)\cdot f_Y(y_0)}{f_Y(y_0)}=f_X(x);$$

аналогично:

$$f_Y(y|x_0)=f_Y(y).$$

Обратимся теперь к зависимым величинам.

Вероятностная зависимость между случайными величинами очень часто встречается на практике. Если случайные величины $X$ и $Y$ находятся в вероятностной зависимости, это не означает, что с изменением величины $X$ величина $Y$ изменится вполне определенным образом; это лишь означает, что с изменением величины $X$ величина $Y$ имеет тенденцию также изменяться (например, возрастать или убывать с ростом $X$). Эта тенденция соблюдается лишь в общих чертах, и в каком-то отдельном случае от нее возможны отступления.

Примерами случайных величин, находящихся в вероятностной зависимости, являются рост и возраст ребенка; затраты и прибыль при производстве определенной продукции; затраты на рекламу и объем продаваемой продукции и т.д.

Степень зависимости между случайными величинами обычно оценивают с помощью числовых характеристик зависимости.

## §3. Числовые характеристики зависимости (ковариация, корреляция)

Основными числовыми характеристиками случайного вектора являются моменты.

Моментом порядка $k,s$ случайного вектора $(X,Y)$ называют математическое ожидание произведения $X^k$ на $Y^s$:

$$M(X^k,Y^s)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^k y^s f(x,y)dxdy, \text{ если } (X,Y)-\text{непрерывен};\\ \sum\limits_i\sum\limits_j x_i^k y_j^s p_{ij}, \text{ если } (X,Y)-\text{дискретен},\end{cases}$$

где $f(x,y)$ – плотность распределения непрерывного случайного вектора $(X,Y)$;

$\{p_{ij}\}$ – закон распределения дискретного случайного вектора.

**Центральным моментом порядка $k,s$ случайного вектора $(X,Y)$** называют математическое ожидание произведения k-ой и s-ой степени центрированных величин:

$$M[(X-m_X)^k,(Y-m_Y)^s]=$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^k(y-m_Y)^s f(x,y)dxdy, \text{ в непрерывном случае};\\ \sum\limits_i\sum\limits_j(x_i-m_X)^k(y_i-m_Y)^s p_{ij}, \text{ в дискретном случае},\end{cases}$$

где $m_X=MX$ – математическое ожидание случайной величины $X$;

$m_Y=MY$ – математическое ожидание случайной величины $Y$.

Соответственно суммарному порядку $k+s$ моменты классифицируются на первые, вторые и т.д.

На практике обычно применяют моменты первого и второго порядка.

Первые моменты представляют собой уже известные математические ожидания величин $X$ и $Y$:

$$M(X^1Y^0)=MX;$$

$$M(X^0Y^1)=MY.$$

Совокупность математических ожиданий представляет собой характеристику положения случайного вектора $(X,Y)$. Геометрически это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание $(X,Y)$.

Вторые центральные моменты случайного вектора – это уже известные дисперсии величин $X$ и $Y$:

$$M((X-m_X)^2(Y-m_Y)^0)=DX;$$

$$M((X-m_X)^0(Y-m_Y)^2)=DY,$$

характеризующие рассеивание $(X,Y)$ вокруг точки $(m_X,m_Y)$.

Особую роль для характеристики случайного вектора играет второй смешанный центральный момент, называемый ковариацией.

**Ковариация случайных величин $X$ и $Y$** – это математическое ожидание произведения центрированных величин:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(X-m_X)(Y-m_Y).$$

Ковариация вычисляется по формуле:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)(y-m_Y)f(x,y)dxdy; & \text{если величины } X,Y - \text{непрерывны},\\ \sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(x_i-m_X)(y_i-m_Y)p_{ij}, & \text{если величины } X,Y - \text{дискретны}.\end{cases}$$

Ковариация случайных величин описывает, помимо рассеивания случайных величин $X$ и $Y$, связь между ними.

**Теорема.** Если случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

*Доказательство* приведем для непрерывного случая (для дискретного – аналогично).

Пусть $X,Y$ – независимые, непрерывные случайные величины с плотностью распределения $f(x,y)$. Из определения независимости следует, что

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

где $f_1(x)$ – плотность распределения величины $X$,

$f_2(y)$ – плотность распределения величины $Y$.

Далее используем формулу для вычисления ковариации в непрерывном случае:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)(y-m_Y)f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)(y-m_Y)f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)f_1(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_Y)f_2(y)dy.$$

Рассмотрим сначала первый множитель:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)f_1(x)dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx}_{m_X}-m_X\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx}_{1}=m_X-m_X=0.$$

Здесь было использовано определение математического ожидания непрерывной случайной величины и условие нормировки для плотности распределения.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_Y)f_2(y)dy=0.$$

Теорема доказана.

Таким образом, если ковариация отлична от нуля, то это является признаком наличия зависимости между случайными величинами.

Но ковариация характеризует не только зависимость между величинами, но и их рассеивание. Например, если величина $X$ очень мало отклоняется от своего математического ожидания, то ковариация будет мала, несмотря на наличие зависимости между $X$ и $Y$. Поэтому для характеристики зависимости в чистом виде используют безразмерную характеристику – корреляцию.

**Коэффициентом корреляции случайных величин $X$ и $Y$** называют нормированную ковариацию случайных величин $X$ и $Y$:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}},$$

где $DX, DY$ – дисперсии случайных величин $X$ и $Y$.

Очевидно, что коэффициент корреляции обращается в ноль вместе с ковариацией случайных величин, т.е. для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю.

Случайные величины, имеющие нулевой коэффициент корреляции, называют **некоррелированными**.

Как уже было установлено, из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Обратное неверно. Из некоррелированности случайных величин еще не следует их независимость. Условие независимости случайных величин – более жесткое, чем условие некоррелированности. Это утверждение доказывает следующий пример.

**Пример.** Рассмотрим случайный вектор $(X,Y)$, равномерно распределенный в круге с радиусом 1 и с центром в начале координат.

Плотность распределения вектора $(X,Y)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, \text{ при } x^2+y^2\le 1;\\ 0, \text{ при } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

Убедимся, что случайные величины $X$ и $Y$ зависимы:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \textit{при } |x|\le 1;\\ 0, \textit{при } |x|>1;\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, \textit{при } |y|\le 1;\\ 0, \textit{при } |y|>1.\end{cases}$$

Так как $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$, то случайные величины $X$ и $Y$ – зависимы.

Вычислим коэффициент корреляции этих величин. Сначала вычислим математические ожидания:

$$m_X=\int_{-1}^{1} x\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=0,$$

так как подынтегральная функция – нечетная, а отрезок интегрирования симметричен относительно начала координат.

Аналогично, $m_Y=0$.

Теперь посчитаем ковариацию:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)dxdy = \frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1} x \cdot y\, dxdy = 0.$$

Таким образом, случайные величины некоррелированы.

Итак, доказано, что некоррелированные случайные величины могут оказаться зависимыми.

Коэффициент корреляции характеризует линейную зависимость между случайными величинами.

**Теорема.** Если случайные величины $X$ и $Y$ связаны линейной зависимостью

$$Y = aX + b,$$

где $a, b$ числа,

то коэффициент корреляции

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1, \text{ если } a > 0; \\ -1, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

*Доказательство.*

При доказательстве этой теоремы используются свойства математического ожидания и дисперсии случайных величин:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)] =$$

$$= M[(X - m_X)(aX + b - am_X - b)] = aM[(X - m_X)^2] = aDX.$$

Далее выразим через $DX$ дисперсию случайной величины $Y$:

$$DY = D(aX + b) = a^2 DX.$$

Теперь используем определение коэффициента корреляции:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{aDX}{\sqrt{a^2 DX \cdot DX}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, a > 0; \\ -1, a < 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Можно показать, что обратное утверждение также верно.

Возникает вопрос: в каких пределах находится значение коэффициента корреляции?

Ответ на него дает следующее свойство коэффициента корреляции: *величина коэффициента корреляции заключена в пределах [–1,+1].*

Если коэффициент корреляции $\rho(X,Y) > 0$, то говорят о **положительной корреляции** случайных величин $X$ и $Y$; если же $\rho(X,Y) < 0$, то – об их **отрицательной корреляции**.

Положительная корреляция означает, что при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем возрастать. Например, вес и рост человека связаны положительной корреляцией.

Отрицательная корреляция означает, что при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем убывать. Например, время, потраченное на регулировку прибора и количество неисправностей, обнаруженных при работе прибора, связаны отрицательной корреляцией.

В качестве характеристики зависимости системы n случайных величин (n-мерного случайного вектора) используют матрицу.

**Ковариационная матрица случайного вектора** $(X_1, X_2, ..., X_n)$ – это матрица, состоящая из элементов

$$k_{ij} = \operatorname{cov}(X_i X_j) = M[(X_i - MX_i)(X_j - MX_j)].$$

Из определения ковариации ясно, что $k_{ij} = k_{ji}$, т.е. элементы ковариационной матрицы, стоящие симметрично главной диагонали, равны.

По главной диагонали ковариационной матрицы стоят дисперсии случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ некоррелированы, то ковариационная матрица имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} DX_1 & 0 & 0 \\ 0 & DX_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & DX_n \end{pmatrix}$$

## §4. Функции нескольких случайных аргументов. Распределение суммы независимых случайных величин

При построении математических моделей часто появляются случайные величины, связанные функциональной зависимостью. Например, время ремонта $Z$ наладчиком двух станков равно сумме времени ремонта первого $X$ и второго $Y$ станков:

$$Z = \varphi(X, Y) = X + Y.$$

Сначала рассмотрим общий метод определения распределения функции двух случайных аргументов.

Имеется случайный вектор $(X,Y)$ с плотностью распределения $f(x.y)$. Случайная величина $Z$ связана с $X$ и $Y$-функциональной зависимостью:

$$Z=\varphi(X,Y).$$

Найдем функцию распределения величины $Z$:

$$G(z)=P(Z<z)=P(\varphi(X,Y)<z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy,$$

где $D(z)=\{(x,y):\varphi(x,y)<z\}$.

Зная конкретный вид функции $\varphi(x,y)$, можно выразить пределы интегрирования в явном виде.

Используем вышеизложенный общий метод для решения важной с точки зрения практики частной задачи: нахождения распределения суммы двух независимых случайных величин. По общей формуле имеем:

$$G(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right\}dx.$$

Рассмотрим теперь плотность распределения $g(Z)$ случайной величины $Z$:

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx.$$

В силу симметрии

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy.$$

Для двух последних интегралов, выражающих плотность распределения суммы независимых случайных величин, используют специальное обозначение:

$$g=f_1*f_2$$

и называют **композицией** (или **сверткой**) **плотностей распределения**.

**Пример.** Пусть случайные величины $X$ и $Y$ независимы и равномерно распределены на $[a,b]$.

Найдем плотность распределения суммы $X+Y$.

*Решение*. Плотности распределения случайных величин $X$ и $Y$ равны:

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b; \\ 0, & \text{если } x \le a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

По формуле для свертки находим, что

$$g(z) = \int_a^b f_1(x) f_2(z-x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f_2(z-x)dx.$$

Из того, что при $z < 2a$

$$z - x < 2a - x < a,$$

а при $z > 2b$

$$z - x > 2b - x > b,$$

заключаем, что при $z < 2a$ и $z > 2b$

$$g(z) = 0.$$

Пусть теперь $2a < x < 2b$. Подынтегральная функция отлична от нуля только при тех значениях $x$, которые удовлетворяют неравенствам

$$a < z - x < b$$

или, что то же самое, неравенствам

$$z - b < x < z - a.$$

Так как $z > 2a$, то $z - a > a$. Очевидно, что $z - a \le b$ при $z \le a + b$.. Следовательно, если $2a < x \le a + b$, то

$$g(z) = \int_a^{z-a} \frac{dx}{(b-a)^2} = \frac{z-2a}{(b-a)^2}.$$

Точно так же при $a + b < z \le 2b$

$$g(z) = \int_{z-b}^{b} \frac{dx}{(b-a)^2} = \frac{2b-z}{(b-a)^2}.$$

Собирая полученные результаты, имеем:

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{z-2a}{(b-a)^2}, \text{ при } 2a<x\le a+b\\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2}, \text{ при } a+b<z\le 2b\\ 0, \text{ при } z\le 2a \text{ и } z>2b\end{cases},$$

Функцию $g(z)$ называют плотностью распределения Симпсона.

В связи с рассмотренным примером интересно отметить следующий факт.

Общие вопросы геометрии привели Н.И. Лобачевского к необходимости решения задачи: имеется группа из n взаимно независимых случайных величин (они являются ошибками наблюдения), требуется найти распределение их среднего арифметического.

Эта задача была им решена только для случая, когда все ошибки равномерно распределены на интервале (–1;1).

Рассмотрим еще два примера композиции плотностей.

**Пример.** Две ремонтные бригады обслуживают водопроводную систему города. Время ожидания очередной заявки на ремонт имеет показательное распределение с параметром $\lambda$. Первую поступившую заявку обслуживает 1-ая бригада, следующую заявку выполняет 2-я бригада. Требуется найти закон распределения времени ожидания своей заявки 2-й бригадой.

*Решение.* Пусть $X$ – время ожидания первой заявки, $Y$ – интервал времени между первой и второй заявками. Случайные величины $X$ и $Y$ будем считать независимыми. Время ожидания заявки 2-й бригадой $Z$ равно сумме $X+Y$. По условию $X$ и $Y$ имеют показательное распределение с плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Так как случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то плотность распределения суммы $X+Y$ равна:

$$g=f_1 * f_2=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x} f_2(z-x)dx.$$

Если $x > z$, то $f_2(z-x) = 0$, поэтому:

$$g(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dz = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

Получена плотность распределения Эрланга 1-го порядка.

В общем случае: закон распределения суммы n независимых случайных величин, имеющих показательное распределение, называют законом Эрланга (n-1)-го порядка. Показательное распределение является распределением Эрланга нулевого порядка. Закон Эрланга был получен при моделировании работы телефонных станций в первых работах по теории массового обслуживания. Плотность распределения Эрланга n-го порядка равна:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{n!}(\lambda x)^n e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0, \\ 0, \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Теперь обратимся к композиции дискретных распределений. Пусть $X$ и $Y$ – независимые дискретные случайные величины; $Z = X + Y$. Представим событие $A_z = \{Z < z\} = \{X + Y = z\}$ в виде суммы несовместных событий:

$$A_z = \sum_i \{X = x_i; Y = z - x_i\}.$$

В силу независимости $X$ и $Y$ имеем:

$$P\{X = x_i; Y = z - x_i\} = P\{X = x_i\} P\{Y = z - x_i\}.$$

Тогда

$$P\{Z = z\} = P\{A_z\} = \sum_i P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = z - x_i\}.$$

Рассмотрим пример использования этой формулы.

**Пример.** Найти закон распределения суммы независимых случайных величин $X$ и $Y$, имеющих распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответственно.

*Решение.* Так как $X$ и $Y$ имеют распределение Пуассона, то

$$P\{X = n\} = \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1}; P\{Y = k\} = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}; n, k = 0,1,2...$$

Используем общую формулу для распределения суммы дискретных

независимых случайных величин:

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!}e^{-\lambda_1}\cdot P\{Y=m-n\}.$$

Так как $P\{Y=m-n\}=0$ для $n>m$, то

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{m-n}}{(m-n)!}e^{-\lambda_2}=$$

$$=\frac{1}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{n!(m-n)!}\lambda_1^n\lambda_2^{m-n}=\frac{1}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{n=0}^{m}C_m^n\lambda_1^n\lambda_2^{m-n}.$$

В соответствии с формулой бинома Ньютона

$$\sum_{n=0}^{m}C_m^n\lambda_1^n\lambda_2^{m-n}=(\lambda_1+\lambda_2)^m.$$

В результате получаем:

$$P\{X+Y=m\}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Таким образом, сумма независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$, также имеет распределение Пуассона, причем его параметр $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

Рассмотрим свойства числовых характеристик суммы случайных величин.

**Теорема 1.** Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=MX+MY$$

*Доказательство.* Проведем его для непрерывных случайных величин (для дискретных – аналогично).

$$M(X+Y)=\int\int(x+y)f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\int xf(x,y)dxdy+\int\int yf(x,y)dxdy=$$

$$=\int x\cdot dx\int f(x,y)dy+\int ydy\int f(x,y)dx=$$

$$=\int xf_1(x)dx+\int yf_2(y)dy=MX+MY.$$

Здесь было использовано свойство плотности распределения:

$$\int f(x,y)dy = f_1(x);$$

$$\int f(x,y)dx = f_2(y).$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме дисперсий этих величин и удвоенной ковариации между ними:

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\,\mathrm{cov}(X,Y).$$

*Доказательство.* Действительно,

$$D(X+Y) = M[X+Y-M(X+Y)]^2 = M[(X-MX)+(Y-MY)^2] =$$

$$= M(X-MX)^2 + 2M[(X-MX)(Y-MY)] + M(Y-MY)^2 =$$

$$= DX + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) + DY.$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Если случайные величины $X$ и $Y$ *независимы*, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$D(X+Y) = DX + DY.$$

**Следствие 2.** Если случайные величины $X$ и $Y$ *независимы*, то дисперсия разности равна сумме дисперсий:

$$D(X-Y) = DX + DY.$$

**Следствие 3.** Если $X$ и $Y$ – независимые случайные величины, то среднеквадратичное отклонение суммы $X+Y$ равно:

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{[\sigma(X)]^2 + [\sigma(Y)]^2}.$$

*Доказательство.* Если $X$ и $Y$ *независимы*, то:

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{DX+DY} = \sqrt{[\sigma(X)]^2 + [\sigma(Y)]^2}.$$

# ГЛАВА 2. МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

## §1. Двумерное нормальное распределение

В теории вероятностей и ее приложениях большую роль играет двумерное нормальное распределение. Плотность двумерной нормальной случайной величины $(X,Y)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}.$$

Это распределение зависит от пяти параметров: $m_X, m_Y$ – математические ожидания величин $X$ и $Y$; $\sigma_X, \sigma_Y$ – средние квадратические отклонения величин $X$ и $Y$; $r$ – коэффициент корреляции величин $X$ и $Y$.

Предположим, что компоненты двумерной нормальной случайной величины $(X,Y)$ не коррелированы, т.е. $r=0$. Тогда имеем:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}=$$

$$=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

плотность распределения двумерной случайной величины $(X,Y)$ равна произведению плотностей распределения компонент $X$ и $Y$, а это значит, что $X$ и $Y$ – независимые случайные величины.

Таким образом доказана следующая **теорема**:

из некоррелированности нормально распределенных случайных величин следует их независимость.

Заметим, что из независимости любых случайных величин следует их некоррелированность. Поэтому термины "некоррелированные" и

"независимые" величины для случая нормального распределения эквивалентны.

При $r \neq 0$ случайные величины $(X,Y)$ зависимы. Запишем условные законы распределения величин $X$ и $Y$ в этом случае:

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - r\frac{x-m_X}{\sigma_X} \right)^2 \right\};$$

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{x-m_X}{\sigma_X} - r\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right\}.$$

Проанализируем один из этих условных законов распределения, например $f(y|x)$. Для этого выражение плотности $f(y|x)$ запишем в виде:

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_Y^2} \left[ y - m_Y - r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X) \right]^2 \right\}.$$

Очевидно, что это плотность нормального распределения с параметрами

$$m_{Y|X} = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$$

и

$$\sigma_{Y|X} = \sigma_Y(1-r^2).$$

Две последние формулы показывают, что в условном законе распределения величины $Y$ при фиксированном значении $X = x$ от этого значения зависит только математическое ожидание, но не дисперсия.

Величина $m_{Y|X}$ называется **условным математическим ожиданием** величины $Y$ при данном $x$.

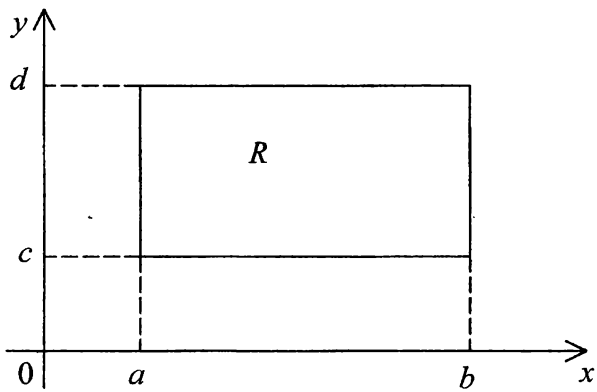
Перейдем теперь к формулам для вероятности попадания нормально распределенной двумерной случайной величины в различные области на плоскости.

Пусть случайный вектор $(X,Y)$, компоненты которого независимы,

подчинен нормальному закону, т.е.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}.$$

Требуется вычислить вероятность попадания случайной точки $(X,Y)$ в прямоугольник $R$, стороны которого параллельны координатным осям.




Имеем

$$P\{(X,Y)\in R\}=\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}dx\cdot\int_c^d\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}dy=$$

$$=\left[\Phi\left(\frac{b-m_X}{\sigma_X}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_X}{\sigma_X}\right)\right]\cdot\left[\Phi\left(\frac{d-m_Y}{\sigma_Y}\right)-\Phi\left(\frac{c-m_Y}{\sigma_Y}\right)\right],$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения нормального закона с параметрами 0;1. Данная функция затабулирована (таблицу см. в файле материалов юниты №1).

К числу немногих плоских фигур, вероятность попадания в которые может быть вычислена в конечном виде, принадлежит эллипс равных вероятностей.

Пусть плотность распределения нормального закона на плоскости задана в виде:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\cdot\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2r\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}.$$

Ясно, что данная плотность сохраняет постоянное значение на эллипсах:

$$\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}=C^2,$$

где $C$ – постоянная; на этом основании данные эллипсы носят название **эллипсов равных вероятностей**.

Найдем вероятность попадания точки $(X,Y)$ внутрь эллипса равной вероятности $G_C$:

$$P(C)=P\{(X,Y)\in G_C\}=\iint\limits_{G_C}f(x,y)dxdy.$$

Для вычисления этого интеграла введем полярные координаты:

$$x-m_X=\rho\cos\theta,$$

$$y-m_Y=\rho\sin\theta.$$

Последний интеграл при этом примет вид:

$$P(C)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{C\lambda\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\lambda^2\right\}\rho d\rho,$$

где для краткости обозначено

$$\lambda^2=\frac{1}{1-r^2}\left[\frac{\cos^2\theta}{\sigma_X^2}-2r\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{\sin^2\theta}{\sigma_Y^2}\right].$$

Интегрирование по $\rho$ дает

$$P(C)=\frac{1-\exp\left\{-\dfrac{C^2}{2(1-r^2)}\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda^2}.$$

Интегрирование по $\theta$ можно выполнить по правилам интегрирования тригонометрических функций, но в этом нет необходимости, так как оно автоматически производится с помощью вероятностных соображений. Действительно,

$$P(+\infty)=1=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda^2}=2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}$$

и, стало быть,

$$P(C)=1-e^{-\frac{C^2}{2(1-r^2)}}.$$

**Пример.** Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и нормально распределены с $m_X=m_Y=0;\ DX=DY=1$. Найти вероятность того, что случайная точка $(X,Y)$ попадет в кольцо $K=\{(x,y):4\le x^2+y^2\le 9\}$.

*Решение.* Так как случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то они некоррелированы и, следовательно, $r=0$. Ясно, что

$$P\{(X,Y)\in K\}=P\{(X,Y)\in G_3\}-P\{(X,Y)\in G_2\}=P(3)-P(2)=$$

$$=(1-e^{-\frac{9}{2}})-(1-e^{-\frac{4}{2}})=e^{-2}-e^{-4,5}\approx 0{,}1242.$$

## §2. Общий случай n-мерного нормального распределения

Плотность нормального распределения в пространстве n измерений имеет вид:

$$f(x_1,x_2,...,x_i)=\frac{\sqrt{|C|}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(x_i-m_{X_i})(x_j-m_{X_j})\right\},$$

где $|C|$ – определитель матрицы $C=\|C_{ij}\|$ – обратной к корреляционной матрице;

$m_{x_i}$ – математическое ожидание случайной величины $X_i$ – i-ой компоненты n-мерного нормального случайного вектора.

Из общего выражения вытекают все формы нормального закона для любого числа измерений и для любых видов зависимости между случайными величинами. В частности, при $n=2$ корреляционная матрица есть

$$K=\begin{Vmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X\sigma_Y r \\ \sigma_X\sigma_Y r & \sigma_Y^2 \end{Vmatrix},$$

где $r$ – коэффициент корреляции. Отсюда

$$|K|=\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-r^2); \qquad |C|=\frac{1}{\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-r^2)};$$

$$C=\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\sigma_X^2(1-r^2)} & \dfrac{-r}{\sigma_X\sigma_Y(1-r^2)} \\ \dfrac{-r}{\sigma_X\sigma_Y(1-r^2)} & \dfrac{1}{\sigma_X^2(1-r^2)} \end{Vmatrix}.$$

Подставляя определитель матрицы $|C|$ и ее члены в общую формулу, получаем формулу для нормального закона на плоскости:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\},$$

которая была дана в начале §1 этой главы.

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, то плотность распределения величины $(X_1, X_2, ..., X_n)$ равна

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot...\cdot\sigma_n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m_{X_i})^2}{\sigma_i^2}\right\}.$$

При $n=2$ эта формула принимает вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}.$$

## §3. Функции от нормально распределенных случайных величин. Распределение хи-квадрат, Стьюдента, Снедекора-Фишера

Наиболее простая функция – линейная, поэтому сначала рассмотрим сумму двух независимых случайных величин $X$ и $Y$, подчиненных нормальным законам:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}},$$

$$f_2(y)=\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}$$

Найдем плотность распределения их суммы $Z=X+Y$. Применим общую формулу для композиции законов распределения:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(z-x)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(z-x-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}dx.$$

Вычисляя последний интеграл, получим:

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[z-(m_x+m_y)\right]^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right\},$$

а это есть не что иное, как нормальный закон с параметрами

$$m_Z=m_X+m_Y$$

и $$\sigma_Z=\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему правилу.

**Правило композиции нормальных распределений**: при

композиции нормальных распределений получается снова нормальное распределение, причем математические ожидания и дисперсии суммируются.

Интересно заметить, что имеет место и обратное утверждение.

**Теорема Крамера**:** если сумма двух независимых случайных величин распределена по нормальному закону, то каждое слагаемое также распределено по нормальному закону.

Правило композиции нормальных распределений может быть обобщено для произвольного числа независимых случайных величин. Если имеется n независимых нормально распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, со средними $m_1, m_2, ..., m_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$, то величина $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ также имеет нормальное распределение с параметрами

$$m_Y = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Перейдем к случаю зависимых слагаемых.

Если случайный вектор $(X, Y)$ имеет нормальное распределение и его компоненты $X$ и $Y$ зависимы, то закон распределения их суммы $Z = X + Y$ есть тоже нормальный закон со средним

$$m_Z = m_X + m_Y$$

и дисперсией

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2r\sigma_X\sigma_Y,$$

где $r$ – коэффициент корреляции величин $X$ и $Y$.

Рассмотрим общий случай: **линейную функцию от нормально распределенных аргументов.**

Дан n-мерный, нормально распределенный случайный вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$; случайная величина $Y$ представляет собой линейную функцию этих величин:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b.$$

Очевидно, что случайная величина $Y$ также распределена нормально. Параметры распределения случайной величины $Y$ можно вычислить, используя свойства математического ожидания и дисперсии:

$$m_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b;$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i \cdot a_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j,$$

где $m_i$ – математическое ожидание случайной величины $X_i (i = 1,2,..., n)$;

$\sigma_i^2$ – дисперсия случайной величины $X_i (i = 1,2,..., n)$;

$r_{ij}$ – коэффициент корреляции между $X_i$ и $X_j$.

В математической статистике важную роль играют распределения, рассматриваемые далее.

**1. Распределение хи-квадрат с n степенями свободы $\chi^2(n)$.**

Пусть $X_1, X_2,..., X_n$ – независимые случайные величины, распределены по одному и тому же нормальному закону с параметрами $m$ и $\sigma$.

Функция распределения величины

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$$

носит название хи-квадрат распределение с $n$ степенями свободы.

Найдем плотность распределения случайной величины, имеющей $\chi^2$-распределение с двумя степенями свободы. Для простоты положим $m = 0; \sigma = 1$.

Сначала найдем распределение квадрата нормально распределенной случайной величины $Y = X^2$.

При $y > 0$ для функции распределения имеем:

$$F_Y(y) = P(X^2 < y) = P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}),$$

откуда

$$f_Y(y)=\left[F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]=f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}.$$

Очевидно, что $f_Y(y)=0$ при $y\le 0$.

Теперь найдем плотность распределения суммы $X_1^2+X_2^2=Y_2+Y_2=Z$. Для $z>0$ имеем

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)f_2(z-y)dy=\int_0^z\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi(z-y)}}e^{-(z-y)/2}dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-z/2}\int_0^z\frac{dy}{\sqrt{zy-y^2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-z/2}\int_0^z\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(y-\frac{z}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-z/2}2\arcsin 1=\frac{1}{2}e^{-z/2}.$$

Таким образом, плотность $\chi^2$-распределения с $n=2$ степенями свободы равна:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2}, & \text{при } x>0,\\ 0, & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Плотность $\chi^2$-распределения с $n$ степенями свободы для $x>0$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$, где $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция.

Распределение $\chi^2$ табулировано.

Математическое ожидание $\chi^2$-распределения с $n$ степенями свободы равно $n$, а дисперсия равна $2n$.

Тесно связаны с $\chi^2$-распределением распределения Рэлея и Максвелла.

**Распределение Рэлея**** может быть интерпретировано как распределение длины случайного вектора, координаты которого в декартовой системе координат на плоскости независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и $\sigma$. При $\sigma=1$ распределение Рэлея совпадает с распределением квадратного корня из случайной величины, имеющей $\chi^2$-распределение с двумя степенями свободы.

Плотность распределения Рэлея имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}; & x\geq 0,\\ 0; & x<0.\end{cases}$$

Это распределение находит основное применение в теории стрельбы и статистической теории связи.

**Распределение Максвелла**** интерпретируют как распределение длины случайного вектора, координаты которого в декартовой системе координат в трехмерном пространстве независимы и нормальны с параметрами 0 и $\sigma$. При $\sigma=1$ распределение Максвелла совпадает с распределением квадратного корня из случайной величины, имеющей $\chi^2$-распределение с тремя степенями свободы.

Плотность распределения Максвелла имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\sigma^3}e^{-x^2/2\sigma^2}; & \text{при } x\geq 0,\\ 0; & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Распределение Максвелла широко известно как распределение скоростей частиц в статистической механике и физике.

**2. Распределение Стьюдента $St(n)$** [Стьюдент – псевдоним английского статистика Госсета, впервые нашедшего этот закон эмпирическим путем].

Распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы определяется как распределение отношения:

$$T = \frac{X}{Y}$$

независимых случайных величин $X$ и $Y$, где $X$ подчиняется нормальному распределению с параметрами 0 и 1, а $nY^2$ имеет $\chi^2$-распределение с $n$ степенями свободы.

Плотность распределения Стьюдента с n степенями свободы имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция.

Математическое ожидание при $n \geq 2$ равно 0, а дисперсия при $n > 2$ равна $n/(n-2)$.

При $n = 1$ распределение Стьюдента совпадает с распределением Коши.

Важная роль распределения Стьюдента в математической статистике объясняется следующим фактом: если случайные величины $X_0, X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и одинаково нормально распределены с параметрами $m$ и $\sigma$, то отношение

$$T = \frac{X_0 - m}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}}$$

имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы, которое не зависит от параметров $m$ и $\sigma$.

Распределение Стьюдента табулировано. Для достаточно больших n распределение Стьюдента близко к нормальному с параметрами 0 и 1, поэтому в этом случае можно пользоваться таблицами нормального распределения.

**3. Распределение Снедекора-Фишера** (или **F-распределение**) $F(n_1, n_2)$.

Распределение Снедекора-Фишера имеет случайная величина

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\chi^2_{n_1}}{n_1} : \frac{\chi^2_{n_2}}{n_2},$$

где $\chi^2_{n_1}$ и $\chi^2_{n_2}$ – случайные величины, имеющие $\chi^2$-распределение с $n_1$ и $n_2$ степенями свободы соответственно.

В математической статистике используют следующий факт. Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_{n_1}, Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$ независимы и нормально распределены с параметрами $m$ и $\sigma^2$, то случайная величина

$$F_{n_1,n_2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - m)^2 \Bigg/ \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - m)^2$$

имеет распределение Снедекора-Фишера, не зависящее от параметров $m$ и $\sigma^2$.

Плотность распределения Снедекора-Фишера при $x > 0$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)(1+x)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}.$$

В математической статистике также используют величину:

$$Z = \frac{1}{2}\ln F_{n_1 n_2}.$$

Распределение Снедекора-Фишера табулировано.

## §4. Полиномиальное распределение

Полиномиальное распределение – одно из дискретных многомерных распределений, которое служит естественным обобщением биномиального распределения.

Рассмотрим последовательность из $n$ независимых испытаний, в каждом из которых может произойти одно из $m$ взаимно исключающих событий (если $m=2$, то это – испытания Бернулли). Пусть при каждом испытании вероятность появления событий $A_1, A_2, ..., A_m$ равны соответственно $p_1, p_2, ..., p_m$, причем $0 \le p_k \le 1$ для $k = 1,2,...,m$ и $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$. Обозначим $X_k$ – число появлений события $A_k$ при n испытаниях, тогда для любых целых чисел $n_1, n_2, ..., n_m$, удовлетворяющих единственному условию $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$, верно:

$$P\{X_1 = n_1, X_2 = n_2, ..., X_m = n_m\} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_m^{n_m}.$$

Последняя вероятность есть вероятность того, что при $n$ независимых испытаниях событие $A_1$ появилось $n_1$ раз, событие $A_2$ появилось $n_2$ раз и т.д.

Таким образом, **полиномиальное распределение** – совместное распределение случайных величин $X_1, X_2, ..., X_m$, каждая из которых при этом имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $MX_k = np_k$ и дисперсией $DX_k = np_k(1-p_k)$.

Полиномиальное распределение широко используется в математической статистике.

# ГЛАВА 3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## §1. Неравенство Чебышева

В практической деятельности большое значение имеют события с вероятностями, близкими к единице или нулю. Поэтому одной из задач теории вероятностей является установление закономерностей, происходящих с вероятностями, близкими к единице; при этом особую роль играют закономерности, возникающие в результате наложения большого числа случайных факторов. Группа теорем, известная под названием "закона больших чисел" является одним из таких предложений теории вероятностей.

Установленное при помощи закона больших чисел свойство случайных величин при определенных условиях вести себя практически как не случайные позволяет предсказывать результаты массовых случайных явлений почти с полной определенностью.

Возможности таких предсказаний в области массовых случайных явлений еще больше расширяются наличием другой группы теорем, касающихся предельных законов распределения. Речь идет о группе теорем, известных под названием "центральная предельная теорема". При суммировании достаточно большого числа случайных величин закон распределения суммы приближается к нормальному при соблюдении некоторых условий. Формы центральной предельной теоремы различаются между собой теми условиями на случайные величины, для которых устанавливается это свойство суммы.

Совокупность различных форм закона больших чисел вместе с различными формами центральной предельной теоремы образуют **предельные теоремы теории вероятностей**.

Для доказательства теорем, относящихся к группе "закона больших чисел", необходимо одно весьма общее неравенство, называемое неравенством Чебышева. Это неравенство было открыто независимо друг от друга П.Л. Чебышевым в 1867г. и Ж. Бьенеме в 1853г.

**Неравенство Чебышева**: каково бы ни было положительное число $\alpha$, вероятность того, что случайная величина $X$ отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на $\alpha$, ограничена сверху величиной $\frac{DX}{\alpha^2}$:

$$P\{|X - MX| \geq \alpha\} \leq \frac{DX}{\alpha^2}.$$

*Доказательство*: приведем для случая, когда случайная величина $X$

– непрерывна. Используя свойства плотности распределения, имеем:

$$P\{|X - MX| \geq \alpha\} = \int\limits_{|X-MX|\geq\alpha} f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность случайной величины $X$.

Далее имеем:

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx \geq \int\limits_{|x-MX|\geq\alpha}|x-MX|^2 f(x)dx \geq$$

$$\geq \alpha^2 \int\limits_{|x-MX|\geq\alpha} f(x)dx = \alpha^2 P\{|x-MX| \geq \alpha\}.$$

Таким образом, $P\{|X - MX| \geq \alpha\} \leq \dfrac{DX}{\alpha^2}$.

**Пример.** Дана случайная величина $X$ с математическим ожиданием $m_X$ и дисперсией $\sigma_X^2$. Оценить сверху вероятность того, что величина $X$ отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на $3\sigma_X$.

*Решение.* Полагая в неравенстве Чебышева $\alpha = 3\sigma_X$, имеем:

$$P\{|X - m_X| \geq 3\sigma_X\} \leq \frac{DX}{9\sigma_X^2} = \frac{1}{9},$$

т.е. вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания выйдет за пределы трех средних квадратических отклонений, не может быть больше $\dfrac{1}{9}$.

Заметим, что неравенство Чебышева дает только верхнюю границу вероятности данного отклонения. Больше этой границы вероятность не может быть при любом законе распределения. На практике, в большинстве случаев вероятность того, что величина $X$ выйдет за пределы участка $m_X \pm 3\sigma_X$, значительно меньше $1/9$. Например, для нормального закона эта вероятность приблизительно равна 0,003.

## §2. Закон больших чисел

Для того чтобы сформулировать теоремы, являющиеся различными формами закона больших чисел, сначала введем понятие "сходимость по вероятности".

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ **сходится по вероятности** к величине $b$, если при увеличении n вероятность того, что $X_n$ и $b$ будут сколь угодно близки, неограниченно приближается к единице:

$$P\{|X_n - b| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Сходимость по вероятности обозначают следующим образом:

$$X_n \xrightarrow{P} b.$$

Одной из наиболее простых, но вместе с тем наиболее важных форм закона больших чисел является теорема, доказанная Чебышевым в 1867г.

**Теорема Чебышева.** Если $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной

$$DX_1 \le C; DX_2 \le C; ...; DX_n \le C;$$

то среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k.$$

*Доказательство.* В условиях теоремы

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k,$$

и, следовательно,

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \le \frac{C}{n}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}MX_k\right|\le\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\varepsilon^2}\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}MX_k\right|<\varepsilon\right\}\ge 1.$$

А так как вероятность не может быть больше единицы, то отсюда и следует утверждение теоремы.

Отметим важные частные случаи теоремы Чебышева: теоремы Бернулли и Пуассона. Яков Бернулли в конце XVIII века доказал теорему, носящую теперь его имя. Эта теорема впервые была опубликована в 1713 г. после смерти автора. Затем в начале XIX века Пуассон доказал аналогичную теорему в более широких условиях.

**Теорема Бернулли.** Пусть $\mu_n$ – число наступлений события $A$ в последовательности $n$ независимых опытах и $p$ есть вероятность наступления события $A$ в каждом из испытаний. Тогда частота события $A$ сходится по вероятности к его вероятности:

$$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p.$$

*Доказательство.*

Введем случайные величины $X_k$ – число появлений события $A$ в k-ом опыте, тогда

$$\mu_n=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

А так как

$$MX_k=p;\ DX_k=p(1-p)\le 1,$$

то теорема Бернулли является простейшим частным случаем теоремы Чебышева.

Так как на практике часто неизвестные вероятности приходится приближенно определять из опыта, то для проверки соответствия теоремы Бернулли опыту было проведено большое число опытов. При этом рассматривались события, вероятности которых можно считать по тем или иным соображениям известными, относительно которых легко проводить испытания и обеспечить независимость испытаний, а также постоянство вероятностей в каждом из испытаний. Все такие опыты дали прекрасное совпадение с теорией. Приведем некоторые из них.

Французский естествоиспытатель XVIII века Бюффон бросил монету 4040 раз, герб выпал при этом 2048 раз. Частота появления герба в опыте Бюффона приближенно равна 0,507.

Английский статистик К. Пирсон бросал монету 12000 раз и при этом наблюдал 6019 выпадений герба. Частота выпадения герба в этом опыте Пирсона равна 0,5016. В другой раз он бросил монету 24000 раз, и герб при этом выпал 12012 раз; частота выпадения герба при этом оказалась равна 0,5005. Во всех приведенных опытах частоты лишь немного уклонялись от вероятности – 0,5.

**Теорема Пуассона.**** Если производится n независимых опытов и вероятность появления события $A$ в k-ом опыте равна $p_k$, то при увеличении n частота $\frac{\mu_n}{n}$ события $A$ сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей:

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k .$$

*Доказательство.* Вводим в рассмотрение случайные величины $X_k$, равные числу появлений события $A$ в k-ом испытании, тогда

$$MX_k = p_k; DX_k = p_k q_k \le 1$$ и

теорема Пуассона является частным случаем теоремы Чебышева.

Неравенство Чебышева позволяет в случае одинаково распределенных независимых слагаемых получить более сильный результат, чем теорема Чебышева.

**Теорема Хинчина**** (1929 г.). При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию, если последнее существует.

Эта теорема дает основание правилу среднего арифметического, постоянно употребляющемуся в теории измерений. Предположим, что производится измерение некоторой физической величины $a$. Повторив измерения n раз в одинаковых условиях, наблюдатель получит не вполне совпадающие результаты: $x_1, x_2, ..., x_n$. В качестве приближенного значения $a$ принято брать среднее арифметическое из результатов наблюдений:

$$a \approx \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

если измерения лишены систематической ошибки, т.е. если

$$Mx_1 = Mx_2 = ... = Mx_n = a,$$

то согласно закону больших чисел при достаточно большом n с вероятностью, близкой к единице, мы указанным путем можем получить значение, достаточно близкое к $a$.

Теорема Чебышева может быть обобщена и на зависимые случайные величины. Обобщение на случай зависимых величин принадлежит А.А. Маркову (1907 г.).

**Теорема Маркова.**** Если имеются зависимые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ и если при $n \to \infty$

$$\frac{D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{n^2} \to 0,$$

то среднее арифметическое случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k.$$

*Доказательство.* Рассмотрим величину

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k:$$

Очевидно, что $MY = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k$ и $DY = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$.

Применим к величине $Y$ неравенство Чебышева:

$$P\{|Y - MY| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DY}{\varepsilon^2}.$$

Так как по условию теоремы при $n \to \infty$

$$DY \to 0,$$

то $P\{|Y - MY| \geq \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$;

или, переходя к противоположному событию

$$P\{|Y - MY| < \varepsilon\} \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

что и требовалось доказать.

Итак мы рассмотрели различные формы закона больших чисел. Все эти формы, как бы они ни были различны, утверждают одно: факт сходимости по вероятности тех или иных случайных величин к определенным постоянным. Ни в одной из форм закона больших чисел мы не имеем дела с законами распределения случайных величин. Предельные законы распределения составляют предмет другой группы теорем – центральной предельной теоремы, которую иногда называют "количественной формой закона больших чисел".

## §3. Характеристические функции случайных величин

Одна из наиболее общих форм центральной предельной теоремы была доказана А.М. Ляпуновым в 1901 г. Для доказательства этой теоремы А.М. Ляпунов создал метод характеристических функций, который в дальнейшем оказался пригодным для решения широкого круга вероятностных задач. Теория характеристических функций развита в математическом анализе и известна под именем преобразований Фурье.

**Характеристической функцией случайной величины** $X$ называется функция

$$g(t) = M[e^{itX}],$$

где i – мнимая единица.

Зная закон распределения случайной величины $X$, легко найти ее характеристическую функцию.

Если $X$ – дискретная случайная величина с рядом распределения $\{p_k\}_{k=1}^{n}$, тогда ее характеристическая функция

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k .$$

Если $X$ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то ее характеристическая функция

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx .$$

**Пример 1.** Случайная величина $X$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda$, тогда ее характеристическая функция

$$g(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{-\lambda+\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

**Пример 2.** Случайная величина $X$ имеет нормальное распределение с параметрами 0;1; тогда ее характеристическая функция

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx=e^{-t^2/2}.$$

При решении многих задач теории вероятностей удобнее пользоваться характеристическими функциями, чем законами распределения из-за свойств характеристических функций.

*Свойства характеристических функций.*

**1. Характеристическая функция линейной функции от случайной величины**: если случайные величины $X$ и $Y$ таковы, что $Y=aX+b$, где $a,b$ – числа, то их характеристические функции связаны соотношением

$$g_Y(t)=e^{itb}g_X(at).$$

*Доказательство*: Действительно,

$$g_Y(t)=Me^{itY}=Me^{it(aX+b)}=e^{itb}Me^{itaX}=e^{itb}g_X(at).$$

**2. Характеристическая функция суммы случайных величин.** Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

*Доказательство* проведем для двух слагаемых.

Пусть $X_1$ и $X_2$ – независимые случайные величины и $Y=X_1+X_2$. Тогда очевидно, что вместе с $X_1$ и $X_2$ независимы также случайные величины $e^{itX_1}$ и $e^{itX_2}$. Отсюда следует, что

$$Me^{itY}=Me^{it(X_1+X_2)}=M[e^{itX_1}e^{itX_2}]=\underline{Me^{itX_1}}\cdot Me^{itX_2}.$$

Это доказывает требуемое.

Применение характеристических функций в значительной степени опирается на второе свойство. Сложение независимых случайных величин приводит к весьма сложной операции – композиции функций распределения слагаемых. Для характеристических функций эта сложная операция заменяется весьма простой – умножением характеристических функций.

**3. Моменты случайной величины и ее характеристическая функция.** Если случайная величина $X$ имеет абсолютный момент n-го порядка, то характеристическая функция величины $X$

дифференцируема n раз и при $k \le n$:

$$g^{(k)}(0) = i^k MX^k .$$

*Следствие*. Математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$ можно выразить через характеристическую функцию:

$$MX = -ig'(0);$$

$$DX = [g'(0)]^2 - g''(0).$$

При доказательстве предельных теорем важную роль играет теорема единственности.

**Теорема единственности:** функция распределения однозначно определяется своей характеристической функцией.

**Пример 3.** Независимые случайные величины $X_1$ и $X_2$ распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

*Решение.* Ранее была найдена характеристическая функция случайной величины, имеющей распределение Пуассона, следовательно, используя свойства характеристических функций, имеем:

$$g_Y(t) = g_{X_1}(t) \cdot g_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Таким образом, мы получили характеристическую функцию закона Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Согласно теореме единственности случайная величина $Y$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

## §4. Центральная предельная теорема

Все формы центральной предельной теоремы посвящены установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Так как на практике эти условия часто выполняются, нормальный закон является самым распространенным. Он возникает во всех случаях, когда исследуемая случайная величина может быть представлена в виде суммы достаточно большого числа независимых или слабозависимых слагаемых. Например, при измерении физических величин возникающие ошибки складываются из многочисленных независимых элементарных ошибок, порождаемых различными причинами. Поэтому ошибки измерения в большинстве случаев распределены по нормальному закону. Некоторые показатели в экономике также представляют собой сумму большого числа слагаемых, каждое из которых имеет малый вклад в суммарный показатель. В этом

случае исследуемый показатель имеет приближенно нормальное распределение.

Различные формы центральной предельной теоремы отличаются между собой условиями, накладываемыми на распределение слагаемых, образующих сумму.

Одна из наиболее простых форм центральной предельной теоремы – теорема, относящаяся к случаю одинакового распределения слагаемых.

**Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.** Если $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием $m$ и дисперсией $\sigma^2$, то при неограниченном увеличении n закон распределения нормированной суммы

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$$

неограниченно приближается к нормальному (с параметрами 0 и 1), т.е.

$$P\{Y_n \in [\alpha, \beta]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

*Доказательство* приведем для случая непрерывных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ (для дискретных оно будет аналогично).

Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ имеют одно и то же распределение с плотностью $f(x)$, и, следовательно, одну и ту же характеристическую функцию:

$$g_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Для краткости обозначим $\widetilde{X}_k = \frac{X_k - m}{\sigma}; \widetilde{g}(t) = g_{\widetilde{X}_k}(t)$.

По первому и второму свойству характеристических функций, характеристическая функция случайной величины $Y_n$ будет:

$$g_{Y_n}(t) = \left[ \widetilde{g}\left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n.$$

Исследуем более подробно функцию $\widetilde{g}(t)$. Представим ее в окрестности точки $t=0$ по формуле Маклорена с тремя членами:

$$\widetilde{g}(t)=\widetilde{g}(0)+\widetilde{g}'(0)\cdot t+\frac{\widetilde{g}''(0)}{2}\cdot t^2+\alpha(t)\cdot t^2,$$

где $\alpha(t)\to 0$ при $t\to 0$.

Величину $\widetilde{g}(0)$ найдем, используя определение:

$$\widetilde{g}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\cdot 0}\widetilde{f}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(x)dx=1,$$

т.к. $\widetilde{f}(x)$ – плотность распределения.

По третьему свойству характеристических функций:

$$\widetilde{g}'(0)=iM\widetilde{X}=iM\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=i\cdot\frac{1}{\sigma}M(X-m)=$$

$$=\frac{i}{\sigma}[MX-m]=\frac{i}{\sigma}[m-m]=0.$$

Далее:

$$\widetilde{g}''(0)=-M\widetilde{X}^2=-M\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2=\frac{-1}{\sigma^2}M(X-m)^2=$$

$$=\frac{-1}{\sigma^2}\mathrm{DX}=\frac{-1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=-1.$$

Таким образом,

$$\widetilde{g}(t)=1-\frac{1}{2}t^2+\alpha(t)t^2,$$

поэтому

$$\widetilde{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{t^2}{2n}+\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{n}.$$

Итак, мы получили, что

$$g_{Y_n}(t)=\left[1-\frac{t^2}{2n}+\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{n}\right]^n.$$

Прологарифмируем обе части последнего равенства:

$$\ln\left(g_{Y_n}(t)\right)=n\ln\left[1-\frac{t^2}{2n}+\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{n}\right].$$

Будем неограниченно увеличивать n, при этом величина $\kappa=\frac{t^2}{n}\left(\frac{1}{2}-\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)$ стремится к нулю. При достаточно большом n ее можно считать весьма малой. Разложим $\ln(1+\kappa)$ в ряд и ограничимся одним членом разложения:

$$\ln(1-\kappa)\approx-\kappa.$$

Тогда получим:

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{Y_n}(t)=\lim_{n\to\infty}n\cdot(-\kappa)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{t^2}{2}+\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)t^2\right\}=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+\lim_{n\to\infty}t^2\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

По определению $\alpha(t)\to 0$ при $t\to 0$; следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{Y_n}(t)=-\frac{t^2}{2},\ \text{откуда}$$

$$\lim_{n\to\infty}g_{Y_n}(t)=e^{-t^2/2}.$$

Это есть не что иное, как характеристическая функция нормального закона с параметрами $m=0;\ \sigma^2=1$.

Таким образом доказано, что при увеличении n характеристическая функция случайной величины $Y_n$ неограниченно приближается к характеристической функции нормального закона; отсюда, используя теорему единственности, заключаем, что и функция распределения величины $Y_n$ неограниченно приближается к нормальной. Теорема доказана.

Частным случаем последней теоремы является теорема Муавра-Лапласа, которая в общем виде была доказана П. Лапласом в 1812 г., а один частный случай был известен еще А. Муавру (1730 г.).

**Теорема Муавра-Лапласа.**

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью $p$, то справедливо соотношение

$$P\{\alpha < \frac{Z_n - np}{\sqrt{npq}} < \beta\} \approx \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

где $Z_n$ – число появлений события $A$ в n опытах; $q = 1 - p$; n – достаточно велико.

*Доказательство.* Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью $p$ может появиться событие $A$. Представим случайную величину $Z_n$ – общее число появлений события $A$ в n опытах – в виде суммы:

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

где $X_k$ – число появлений события $A$ в k-ом опыте.

По только что доказанной центральной предельной теореме для одинаково распределенных слагаемых закон распределения нормированной суммы

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - MX_k}{\sqrt{DX_k}} = \frac{Z_n - MZ_n}{\sqrt{DZ_n}}$$

при увеличении числа слагаемых приближается к нормальному с параметрами $m = 0$ и $\sigma^2 = 1$.

Случайная величина $Z_n$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n$ и $p$, поэтому

$MZ_n = np$; $DZ_n = npq$, где $q = 1 - p$.

Таким образом,

$$Y_n = \frac{Z_n - np}{\sqrt{npq}}$$

и, следовательно,

$$P(\alpha < \frac{Z_n - np}{\sqrt{npq}} < \beta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Теорема доказана.

Итак, мы разобрали случай одинаково распределенных слагаемых. Теперь перейдем к общему случаю.

**Теорема Ляпунова**** (1901 г.).

Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые случайные величины с конечным третьим абсолютным центральным моментом $b_k = M|X_k - MX_k|^3$, причем $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} DX_k\right)^{3/2}} = 0$, то при неограниченном увеличении n закон распределения нормированной суммы

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} DX_k}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k)$$

неограниченно приближается к нормальному.

## §5. Скорость сходимости в центральной предельной теореме

При применении центральной предельной теоремы встает вопрос, при каких значениях n можно использовать нормальное приближение, а при каких n – нет. Решение этого вопроса зависит от требуемой точности вычисления вероятности. Часто теорему Муавра-Лапласа применяют, если $npq > 9$, а центральную предельную теорему – если $n > 10$.

Точный ответ на вопрос о погрешности, возникающей при замене исходного распределения нормальным, дает оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме.

Приводимая ниже теорема была доказана различными путями А.С. Берри в 1941 г. и К.Г. Эссеном в 1942 г., а затем уточнена.

**Теорема Берри-Эссена.**

Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые, одинаково распределенные,

случайные величины с математическим ожиданием $m$, дисперсией $\sigma^2$ и третьим абсолютным центральным моментом $b$, то

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\le 0{,}8\frac{b}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где $F_n(x)=P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)<x\right\}$ – функция распределения нормированной суммы,

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ – функция распределения нормального закона с параметрами $m=0;\sigma^2=1$.

**Пример.** Оценить с помощью теоремы Берри-Эссена погрешность, возникающую при использовании теоремы Муавра-Лапласа.

*Решение.* В теореме Муавра-Лапласа распределение нормированной суммы независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли, заменяется нормальным.

$$X_k=\begin{cases}1 \text{ с вероятностью } p\\ 0 \text{ с вероятностью } q=1-p\end{cases}$$

Тогда:

$$m=MX_k=p;\ \sigma^2=DX_k=pq;\ b=M|X_k-m|^3=pq(p^2+q^2).$$

Применим теорему Берри-Эссена:

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\le 0{,}8\frac{pq(p^2+q^2)}{pq\sqrt{pq}\sqrt{n}}=0{,}8\frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}.$$

При $p=q=\frac{1}{2}$ получаем $|F_n(x)-\Phi(x)|\le 0{,}8/\sqrt{n}$.

Если $p=q=\frac{1}{2}$; $n=36$; то $|F_n(x)-\Phi(x)|\le 0{,}133$.

Если же $p=q=\frac{1}{2}$; $n=400$; то $|F_n(x)-\Phi(x)|\le 0{,}08$.

# ГЛАВА 4. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

## §1. Понятие о случайном процессе

В предыдущих главах изучались в основном отдельные случайные величины. На практике явления протекают во времени и в пространстве, поэтому приходится иметь дело не с отдельными случайными величинами, а с семействами случайных величин, зависящих от параметра.

**Случайный процесс** – это семейство случайных величин $X(t)$, где параметр $t \in T$ – множеству значений параметра.

Многие важные процессы в природе и на производстве являются примерами случайных процессов: турбулентные течения жидкостей и газов, распространение радиоволн при наличии помех, движение транспортных потоков, обслуживание клиентов в ремонтной мастерской и др.

Параметр $t$ в определении случайного процесса обычно интерпретируют как время. Если зафиксировать значение времени $t_0$, то $X(t_0)$ – обычная случайная величина.

На случайный процесс можно смотреть либо как на совокупность случайных величин, зависящих от параметра $t$, либо как на совокупность реализаций процесса. Реализация представляет собой одно возможное осуществление случайного процесса.

Если параметр $t$ принимает дискретные значения (обычно $t = 0;1;2;...$), то $X(t)$ – **случайный процесс с дискретным временем**, если же $t$ изменяется на некотором интервале (конечном или бесконечном), то $X(t)$ – **случайный процесс с непрерывным временем**.

В свою очередь, если случайные величины семейства принимают дискретные значения, то имеет место **случайный процесс с дискретными значениями**, если же непрерывные – то с **непрерывными значениями**.

К процессам с дискретными значениями относятся, например, процессы образования очередей, распространения мутаций генов в биологической популяции и т.д. К процессам с непрерывными значениями относятся процесс изменения напряжения в осветительной сети, процесс перемешивания шихты во время плавки в доменной печи и т.д.

При решении практических задач обычно предполагают, что случайный процесс протекает в некоторой системе. Под системой может пониматься что угодно: техническое устройство, ремонтная мастерская, железнодорожный узел, биологическая популяция. **Состояние системы**, или **состояние случайного процесса** – это возможное значение случайных величин, образующих случайный процесс.

Начало общей теории случайных процессов было положено работами А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина, относящимися к 30-м годам XX века. Зарождение же теории случайных процессов связано с работами А.А. Маркова начала XX века по изучению так называемых цепей Маркова.

## §2. Цепи Маркова

Случайный процесс, протекающий в системе, называется **марковским процессом**, если он обладает свойством: для каждого момента времени $t_0$ вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т.е. как развивался процесс в прошлом).

Характерное свойство марковских случайных процессов можно увидеть уже на таком простом примере, как известная игра "тише едешь – дальше будешь". В этой игре фишка играющего должна пройти некоторое конечное число пунктов 1,2,...,m. Переход из одного пункта в другой каждый раз определяется исходом бросания игральной кости. Именно, если на данном шаге фишка находится в пункте i, то правивами игры устанавливается пункт перехода ее на следующем шаге в зависимости от числа выпавших на игральной кости очков. Из любого пункта i фишка с некоторой вероятностью $p_{ij}$ переходит в один из пунктов j независимо от характера движения до попадания в пункт i.

На практике часто встречаются случайные процессы, которые с той или иной степенью приближения можно считать марковскими.

Любой марковский процесс описывают с помощью вероятностей состояний и переходных вероятностей.

**Вероятности состояний $P_k(t)$ марковского случайного процесса** – это вероятности того, что случайный процесс (система) в момент времени $t$ находится в состоянии $S_k$:

$$P_k(t) = P\{X(t) = S_k\}.$$

**Переходные вероятности марковского процесса** – это вероятности перехода процесса (системы) из одного состояния в любое

другое:

$$P_{ij}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = S_j \,|\, X(t) = S_i\}.$$

Марковский процесс называют **однородным**, если вероятности перехода за единицу времени не зависят от того, где на оси времени происходит переход.

Наиболее простым процессом является **цепь Маркова** – марковский случайный процесс с дискретным временем и дискретным конечным множеством состояний.

При анализе цепи Маркова составляют граф состояний, на котором отмечают все состояния цепи (системы) и ненулевые вероятности перехода за один шаг.

Марковскую цепь можно представить себе так, как будто точка, изображающая систему, случайным образом перемещается по графу состояний, перескакивая за один шаг из состояния в состояние или задерживаясь на несколько шагов в одном и том же состоянии.

Переходные вероятности цепи Маркова за один шаг $p_{ij}$ записывают в виде матрицы $P = \|p_{ij}\|$, которую называют **матрицей вероятностей перехода** или просто **переходной матрицей.**

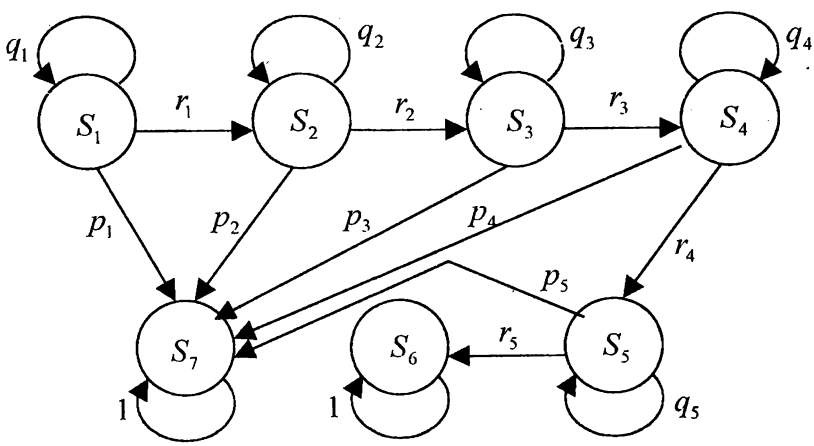
**Пример**. Множество состояний студентов некоторого вуза с пятилетним сроком обучения следующее: $S_1$ – первокурсник, $S_2$ – второкурсник,..., $S_5$ – выпускник. Студенты могут выбывать из вуза в результате его окончания или отчисления, поэтому дополним систему состояниями: $S_6$ – специалисты, окончившие вуз; $S_7$ – лица, обучавшиеся в данном вузе, но не окончившие его.

Для множества учащихся вуза теперь все возможные состояния перечислены. Составим матрицу переходов из состояния в состояние, предполагая, что исключенные не могут быть восстановлены.

Из состояния $S_1$ (первокурсник) за год возможны переходы в состояние $S_2$ (второкурсник), $S_1$ (остаться на первом курсе) и $S_7$ (выбыл из вуза). Остальные переходы считаем невозможными. Поэтому первая строка матрицы состоит из трех положительных чисел: $p_1$ – вероятности выбыть из института, $r_1$ – перейти на II курс; $q_1$ – остаться на I курсе; причем $p_1 + r_1 + q_1 = 1$. Остальные вероятности перейти из состояния $S_1$ равны нулю.

Для второкурсника (состояние $S_2$) возможны переходы в состояния $S_3, S_2, S_7$ с вероятностями $r_2, q_2, p_2$ соответственно. Аналогично для состояний $S_3, S_4$ и т.д.

Построим граф состояний данной цепи Маркова и разметим его переходными вероятностями (отличными от нуля).




Составим матрицу вероятностей переходов:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} q_1 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & q_2 & r_2 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & r_4 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & r_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Переходные матрицы обладают свойством: все их элементы неотрицательны, их суммы по строкам равны единице. Матрицы с таким свойством часто называют стохастическими. Матрицы переходов позволяют вычислить вероятность любой траектории (реализации) цепи Маркова с помощью теоремы умножения вероятностей.

Для однородных цепей Маркова матрицы переходов не зависят от

времени.

При изучении цепей Маркова наибольший интерес представляют: вероятности перехода за m шагов; распределение по состояниям на шаге $m \to \infty$; среднее время пребывания в определенном состоянии; среднее время возвращения в это состояние.

Рассмотрим однородную цепь Маркова с n состояниями. Для получения вероятности перехода из состояния $S_i$ в состояние $S_j$ за m шагов в соответствии с формулой полной вероятности следует просуммировать произведения вероятности перехода из состояния $S_i$ в промежуточное состояние $S_k$ за $l$ шагов на вероятность перехода из $S_k$ в $S_j$ за оставшиеся $m-l$ шагов, т.е.

$$p_{ij}(m) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(l) p_{kj}(m-l).$$

Последнее соотношение для всех $i = 1,...,n; j = 1,...,n$ можно представить как произведение матриц:

$$\boldsymbol{P}(m) = \boldsymbol{P}(l) \cdot \boldsymbol{P}(m-l),$$

Таким образом, имеем:

$$\boldsymbol{P}(2) = \boldsymbol{P}(1) \cdot \boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}^2$$

$$\boldsymbol{P}(3) = \boldsymbol{P}(2) \cdot \boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}(1) \cdot \boldsymbol{P}(2) = \boldsymbol{P}^3$$

и т.д.

$$\boldsymbol{P}(m) = \boldsymbol{P}(m-1) \cdot \boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}(1) \cdot \boldsymbol{P}(m-1) = \boldsymbol{P}^m,$$

что дает возможность найти вероятности перехода между состояниями за любое число шагов, зная матрицу переходов за 1 шаг.

Зная матрицу переходов за m шагов и начальное положение системы, можно найти вероятность находиться на шаге m в любом состоянии $S_j (j = 1,2,...,n)$:

$$P_j(m) = \sum_{i=1}^{n} P_0(i) p_{ij}(m),$$

где $P_0(i)$ – вероятность находиться в начальный момент времени в состоянии $S_i$;

$p_{ij}(m)$ – вероятность перейти из состояния $S_i$ в состояние $S_j$ за m шагов – элемент матрицы $\boldsymbol{P}(m)$.

Возникает вопрос: что будет происходить с системой при $m \to \infty$? Будут ли $p_1(m), p_2(m), ..., p_n(m)$ стремиться к каким-то пределам? Эти пределы, если они существуют, называются **предельными вероятностями состояний**.

Можно доказать следующую **теорему:** если в цепи Маркова из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в каждое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

Вектор $p$, составленный из предельных вероятностей должен удовлетворять соотношению: $p = \boldsymbol{P} \cdot p$.

Таким образом, при $m \to \infty$ в системе устанавливается некоторый предельный стационарный режим, который состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени: каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью. Среднее время пребывания в состоянии $S_i$ за время $T$ равно $p_i T$, где $p_i$ – предельная вероятность состояния $S_i$. Среднее время возвращения в состояние $S_i$ равно $\frac{1}{p_i}$.

**Пример.**

Для многих экономических задач необходимо знать чередование годов с определенными значениями годовых стоков рек. Конечно, это чередование не может быть определено абсолютно точно. Для определения вероятностей чередования (перехода) разделим стоки, введя четыре градации (состояния системы): первую (самый низкий сток), вторую, третью, четвертую (самый высокий сток). Будем для определенности считать, что за первой градацией никогда не следует четвертая, а за четвертой – первая из-за накопления влаги (в земле, водохранилищах и т.д.). Наблюдения показали, что в некоторой области остальные переходы возможны и:

а) из первой градации можно попасть в каждую из средних вдвое чаще, чем опять в первую, т.е. $p_{11} = 0{,}2; p_{12} = 0{,}4; p_{13} = 0{,}4; p_{14} = 0$;

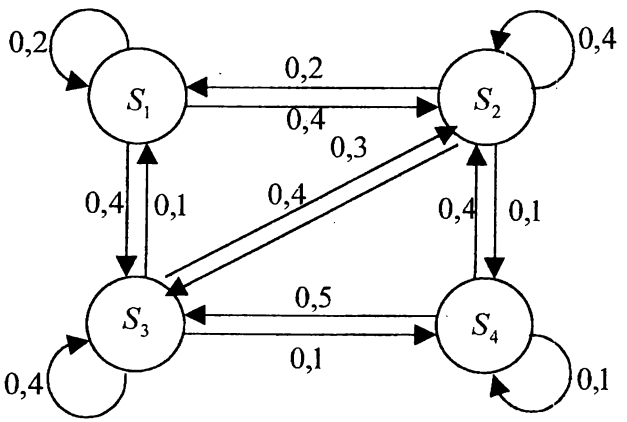
б) из четвертой градации переходы во вторую и третью градации бывают в 4 и 5 раз чаще, чем возвращение в четвертую, т.е. $p_{41} = 0; p_{42} = 0{,}4; p_{43} = 0{,}5; p_{44} = 0{,}1$;

в) из второй градации переход в другие градации может быть только

реже: в первую – в два раза, в третью – на 25%, в четвертую – в четыре раза, чем переход во вторую, т.е. $p_{21} = 0{,}2; p_{22} = 0{,}4; p_{23} = 0{,}3; p_{24} = 0{,}1$;

г) из третьей градации переход во вторую градацию столь же вероятен, как и возвращение в третью градацию, а переходы в первую и четвертую градации бывают в четыре раза реже, т.е. $p_{31} = 0{,}1; p_{32} = 0{,}4; p_{33} = 0{,}4; p_{34} = 0{,}1$.

Построим граф состояний данной цепи Маркова и разметим его переходными вероятностями:




Составим матрицу вероятностей перехода:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем среднее время между засухами и полноводными годами для стоков рек. Для этого нужно найти предельное распределение. Ясно, что за два шага можно перейти из любого состояния данной системы в любое другое, т.к. матрица $\boldsymbol{P}^2$ не содержит нулевых элементов.

Найдем предельные вероятности исходя из условия: $p = p \cdot \boldsymbol{P}$. Запишем это условие в виде системы:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot p_{11} + p_2 \cdot p_{21} + p_3 \cdot p_{31} + p_4 \cdot p_{41}, \\ p_2 = p_1 \cdot p_{12} + p_2 \cdot p_{22} + p_3 \cdot p_{32} + p_4 \cdot p_{42}, \\ p_3 = p_1 \cdot p_{13} + p_2 \cdot p_{23} + p_3 \cdot p_{33} + p_4 \cdot p_{43}, \\ p_4 = p_1 \cdot p_{14} + p_2 \cdot p_{24} + p_3 \cdot p_{34} + p_4 \cdot p_{44}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}2p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}1p_3, \\ p_2 = 0{,}4p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}4p_3 + 0{,}4p_4, \\ p_3 = 0{,}4p_1 + 0{,}3p_2 + 0{,}4p_3 + 0{,}5p_4, \\ p_4 = 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3 + 0{,}1p_4. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} -0{,}8p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}1p_3 = 0, \\ 0{,}4p_1 - 0{,}6p_2 + 0{,}4p_3 + 0{,}4p_4 = 0, \\ 0{,}4p_1 + 0{,}3p_2 - 0{,}6p_3 + 0{,}5p_4 = 0, \\ 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3 - 0{,}9p_4 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений. Ее можно решить, например, методом Гаусса. Для этого необходимо привести матрицу системы к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & -0{,}6 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}9 & -1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ -0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & -1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & -1 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}9 & -1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to\begin{pmatrix}0,4 & -0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,1 & -0,9\\ 0 & 0,9 & -1 & 0,1\\ 0 & -1 & 0,9 & 0,8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0,4 & -0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,1 & -0,9\\ 0 & 0,9 & -1 & 0,1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}0,4 & -0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,1 & -0,9\\ 0 & 0 & -1,9 & 8,2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}0,4p_1-0,6p_2+0,4p_3+0,4p_4=0,\\ 0,1p_2+0,1p_3-0,9p_4=0,\\ -1,9p_3+8,2p_4=0.\end{cases}$$

Итак, система приведена к треугольному виду. Но мы имеем три уравнения и четыре неизвестных. Можно добавить условие $p_1+p_2+p_3+p_4=1$, так как система с вероятностью 1 находится в одном из своих состояний.

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases}p_1=\frac{1}{4}(6p_2-4p_3-4p_4),\\ p_2=9p_4-p_3,\\ p_3=\frac{82}{19}p_4,\\ p_1+p_2+p_3+p_4=1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}p_1=\frac{65}{38}p_4,\\ p_2=\frac{89}{19}p_4,\\ p_3=\frac{82}{19}p_4,\\ \frac{65}{38}p_4+\frac{89}{19}p_4+\frac{82}{19}p_4+p_4=1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$p_4=\frac{38}{445};p_3=\frac{164}{445};p_2=\frac{178}{445};p_1=\frac{65}{445}.$$

Периодичность возвращения в состояние $S_i$ равна $\frac{1}{p_i}$, а

предельные вероятности засушливых и дождливых лет соответственно равны $p_1 = \frac{65}{445} \approx 0{,}15$ и $p_4 = \frac{38}{445} \approx 0{,}08$. Следовательно, периодичность засушливых лет в среднем равна 6-7 лет, а дождливых – 12-13 лет.

## §3. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

В предыдущем параграфе была рассмотрена марковская цепь, т.е. случайный процесс, протекающий в системе, которая случайным образом может переходить из состояния в состояние только в некоторые, заранее определенные моменты времени.

На практике значительно чаще встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в произвольные моменты времени. Например, выход из строя любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта этого элемента также может произойти в произвольный момент и т.д.

Для описания таких процессов в ряде случаев может быть с успехом применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Для вероятностей состояний $p_i(t)$ такого процесса выполнено:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$$

т.к. в момент времени $t$ система находится в одном из своих состояний.

В случае процесса с непрерывным временем вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в момент $t$ будет равна нулю так же, как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины. Поэтому вместо переходных вероятностей $p_{ij}$ рассматривают плотности вероятности перехода.

**Плотность вероятности перехода** $\lambda_{ij}$ – это предел отношения вероятности перехода системы за время $\Delta t$ из состояния $S_i$ в состояние $S_j$ к длине промежутка $\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

где $p_{ij}(\Delta t)$ – вероятность того, что система, находившаяся в момент $t$ в состоянии $S_i$, за время $\Delta t$ перейдет из него в состояние $S_j$.

Плотность вероятности перехода определяется только для $i \neq j$.

Для однородного марковского процесса плотности вероятностей перехода $\lambda_{ij}$ не зависят от $t$.

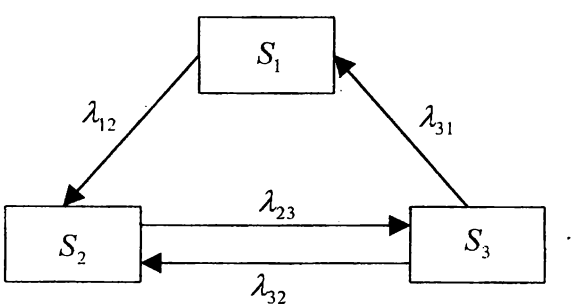
При построении графа состояний марковского процесса над стрелками между состояниями указывают плотности вероятностей перехода. Такой граф называют размеченным графом состояний. Зная размеченный граф состояний, можно определить вероятности состояний:

$$p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)$$

как функции времени. Эти вероятности удовлетворяют определенного вида дифференциальным уравнениям, которые называются **уравнениями Колмогорова**. Решая уравнения, получают вероятности состояний.

Покажем, как выводятся уравнения Колмогорова, на конкретном примере.

Пусть система имеет три возможных состояния $S_1, S_2, S_3$, причем возможны переходы из $S_1$ в $S_2$, из $S_2$ в $S_3$, из $S_3$ в $S_1$ или $S_2$. Изобразим размеченный граф системы:




Сначала найдем $p_1(t)$ – вероятность того, что система в момент $t$ будет находиться в состоянии $S_1$.

Придадим $t$ малое приращение $\Delta t$ и найдем вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии $S_1$. Это событие может произойти двумя способами:

- в момент $t$ система уже была в состоянии $S_1$, и за время $\Delta t$ не вышла из этого состояния;

-в момент $t$ система была в состоянии $S_3$, а за время $\Delta t$ перешла из него в $S_1$.

Вероятность первого варианта найдем как произведение вероятности $p_1(t)$ на условную вероятность того, что будучи в состоянии $S_1$ система за время $\Delta t$ не перейдет из него в $S_2$. Эта условная вероятность (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна $1-\lambda_{12}\Delta t$.

Аналогично, вероятность второго варианта равна вероятности того, что в момент $t$ система была в состоянии $S_3$, умноженной на условную вероятность перехода за время $\Delta t$ в состояние $S_1$:

$$p_3(t)\cdot\lambda_{31}\Delta t.$$

Применяя теорему сложения вероятностей, получаем:

$$p_1(t+\Delta t)=p_1(t)(1-\lambda_{12}\Delta t)+p_3(t)\lambda_{31}\Delta t.$$

Раскрыв скобки в правой части, перенесем $p_1(t)$ в левую часть и разделим обе части равенства на $\Delta t$:

$$\frac{p_1(t+\Delta t)-p_1(t)}{\Delta t}=-\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{31}p_3(t).$$

Устремим $\Delta t$ к нулю и перейдем к пределу:

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=-\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{31}p_3(t).$$

Итак, получено дифференциальное уравнение для $p_1(t)$. Аналогичные дифференциальные уравнения могут быть выведены для остальных вероятностей $p_2(t)$ и $p_3(t)$:

$$\frac{dp_2(t)}{dt}=-\lambda_{23}p_2(t)+\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{32}p_3(t);$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{32}p_3(t) - \lambda_{31}p_3(t) + \lambda_{23}p_2(t).$$

Отбросим для краткости аргумент $t$ у функций и перепишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{31}p_3, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = -\lambda_{32}p_3 - \lambda_{31}p_3 + \lambda_{23}p_2. \end{cases}$$

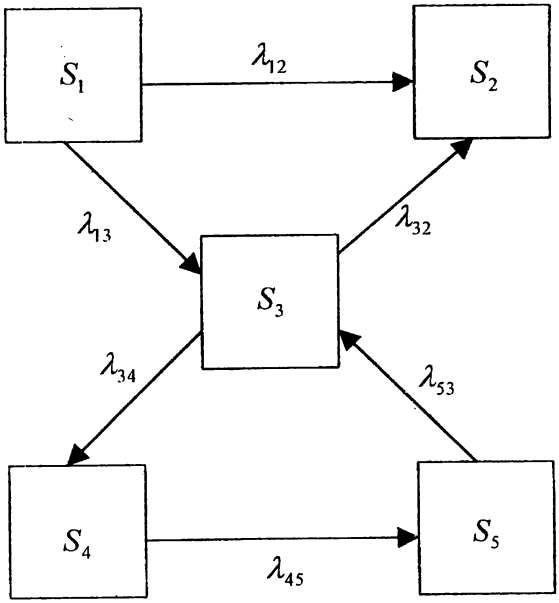
Эти уравнения для вероятностей состояний и называются уравнениями Колмогорова.

Интегрирование этой системы дает искомые вероятности состояний как функции времени. Начальные условия при интегрировании определяются начальным состоянием системы. Например, если при $t = 0$ система находится в состоянии $S_1$, то $p_1(0) = 1; p_2(0) = 0; p_3(0) = 0$.

Структура уравнений Колмогорова является вполне определенной, так как подчиняется **правилу составления по размеченному графу состояний**. В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак "минус"; если в состояние – знак "плюс". Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Это правило составления дифференциальных уравнений для вероятностей состояний является общим и справедливо для любого марковского процесса с непрерывным временем и дискретным конечным множеством состояний. С его помощью можно сразу записывать дифференциальные уравнения для вероятностей состояний непосредственно по размеченному графу состояний.

**Пример.** Размеченный граф состояний системы имеет вид, показанный на рисунке:




Нужно написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и начальные условия для решения этой системы, если известно, что в начальный момент система находится в состоянии $S_1$.

*Решение*. Система уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -(\lambda_{32} + \lambda_{34})p_3 + \lambda_{13}p_1 + \lambda_{53}p_5;$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{45}p_4 + \lambda_{34}p_3;$$

$$\frac{dp_5}{dt} = -\lambda_{53}p_5 + \lambda_{45}p_4.$$

Начальные условия:

при $t = 0$ $p_1(0) = 1$; $p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = 0$.

## §4. Пуассоновский процесс

При рассмотрении процессов, протекающих в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто бывает удобно представлять себе процесс так, как будто переходы системы из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток неисправностей, поток заявок, поток посетителей и т.д.). Рассмотрим поток событий подробнее.

Предположим, что с течением времени $t$ регистрируется наступление некоторых событий. Например, регистрируются требования, последовательно поступающие на некоторую систему обслуживания (скажем, поступают запросы в справочное бюро, к бензозаправочной станции подъезжают автомашины и т.п.).

Предположим, что рассматриваемый поток обладает следующими свойствами:

а) вероятность отдельного события за малый промежуток времени $\Delta t$ есть $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, где $\lambda$ – некоторая положительная постоянная и $o(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\Delta t$ (стационарность);

б) вероятность наступления более чем одного события за время $\Delta t$ есть $o(\Delta t)$ (ординарность);

в) количества событий $X(\Delta_1),...,X(\Delta_n)$, наступивших на непересекающихся временных интервалах $\Delta_1,...,\Delta_n$, представляют собой взаимно независимые случайные величины (отсутствие последействия).

Рассмотрим, каким физическим условиям соответствуют данные свойства и за счет чего они могут нарушаться.

Стационарность потока означает его однородность по времени; вероятностные характеристики такого потока не должны меняться в зависимости от времени. Это разумеется не значит, что фактическое число событий, появляющихся в единицу времени, постоянно. Поток может иметь сгущения и разрежения. Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера, а среднее число событий, попадающих на единичный отрезок времени, остается постоянным для всего рассматриваемого периода.

На практике часто встречаются потоки событий, которые на ограниченном участке времени могут рассматриваться как стационарные. Например, поток вызовов, поступающих на телефонную станцию с 12 до 13 часов. Тот же поток в течение суток уже не будет стационарным, так как ночью звонков всегда значительно меньше, чем днем.

Ординарность потока означает, что события в потоке приходят

поодиночке, а не парами, тройками и т.д. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую, практически можно считать ординарным, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в ЗАГС для регистрации брака.

Отсутствие последействия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга. Например, поток пассажиров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без последействий, потому что причины, обусловившие приход отдельного пассажира именно в данный момент, а не в другой, как правило, не связаны с аналогичными причинами у других пассажиров. Если такая зависимость появляется, то условие отсутствия последействия оказывается нарушенным.

Поток, обладающий всеми тремя свойствами (стационарный, ординарный, без последействий), называют **простейшим** или **пуассоновским потоком**. Название "простейший" связано с тем, что математическое описание событий, связанных с простейшими потоками, оказывается наиболее простым:

1) постоянная $\lambda$ (фигурирующая в свойстве (а)) равна среднему числу событий, наступающих за единицу времени:

$$\lambda t = MX(t);$$

2) промежуток времени $T$ между соседними событиями в простейшем потоке распределен по показательному закону; его среднее значение и среднее квадратическое отклонение равны $\frac{1}{\lambda}$;

3) простейший поток обладает тем свойством, что $X(t)$ – число событий, наступивших за время $t$, является марковским процессом, который называют пуассоновским.

**Пуассоновский процесс** – это случайный марковский процесс с дискретными значениями и вероятностями состояний:

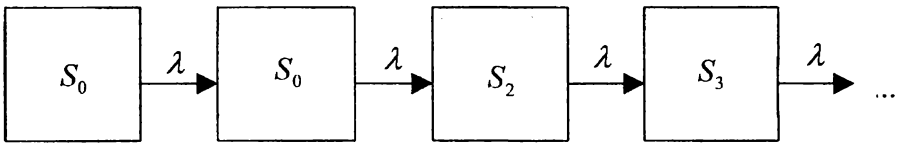
$$p_k(t) = P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Плотности вероятности перехода пуассоновского процесса $\lambda_{ij}$ таковы, что

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{при} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq i+1, \end{cases} \quad i = 0,1,2,...$$

т.е. из состояния $i$ можно непосредственно перейти лишь в следующее состояние $j = i+1 \quad (i = 0;1;2,...)$.

Размеченный граф состояний имеет вид:




Дифференциальные уравнения Колмогорова для функций $p_j(t)$ в данном случае выглядят следующим образом:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t),$$

$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), \quad k = 1,2,...$$

Начальные условия:

$$p_0(0) = 1, \; p_k(0) = 0, \; k = 1,2,...$$

Данная система дифференциальных уравнений с указанными начальными условиями имеет единственное решение:

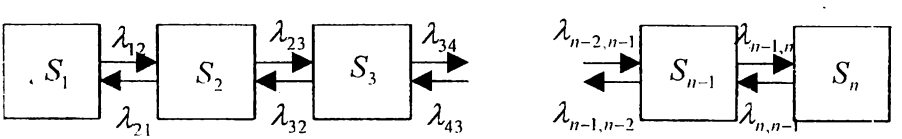
$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \quad k = 0,1,2,...$$

## §5. Процесс "гибели и размножения"

В данном параграфе мы познакомимся с одной очень типичной схемой непрерывных марковских цепей – так называемой "схемой гибели и размножения".

Происхождение термина "схема гибели и размножения" ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается процесс изменения численности популяции.

Марковский процесс с конечным числом состояний n называется **процессом "гибели и размножения"**, если его граф состояний имеет вид, представленный на рисунке, т.е. все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ($S_2, S_3, ..., S_{n-1}$) связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния ($S_1, S_n$) – только с одним соседним состоянием:



**Пример.**

Техническое устройство состоит из трех одинаковых узлов; каждый из них может выходить из строя (отказывать); отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Состояние системы пронумеруем по числу неисправных узлов:

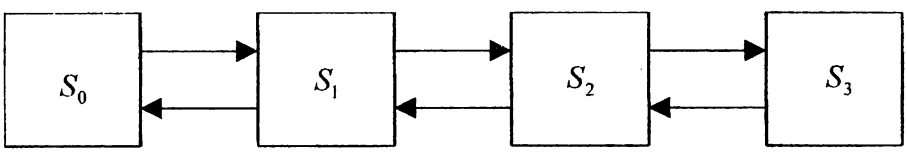
$S_0$ – все узлы исправны;

$S_1$ – один узел отказал, два исправны;

$S_2$ – два узла отказали, один работает;

$S_3$ – все три узла отказали.

Нарисуем граф состояний системы:




Из графа состояний видно, что процесс, протекающий в системе представляет собой процесс "гибели и размножения".

Схема "гибели и размножения" очень часто встречается в самых разнообразных практических задачах, поэтому рассмотрим данную схему в общем виде.

По графу состояний запишем дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -(\lambda_{23} + \lambda_{21})p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -(\lambda_{34} + \lambda_{32})p_3 + \lambda_{23}p_2 + \lambda_{43}p_4,$$

.....

$$\frac{dp_{n-1}}{dt} = -(\lambda_{n-1,n-2} + \lambda_{n-1,n})p_{n-1} + \lambda_{n-2,n-1}p_{n-2} + \lambda_{n,n-1}p_n,$$

$$\frac{dp_n}{dt} = -\lambda_{n,n-1}p_n + \lambda_{n-1,n}p_{n-1}.$$

В общем виде решить такую систему достаточно сложно. Но можно легко найти предельные вероятности состояний. Для этого в системе

уравнений Колмогорова, описывающих вероятности состояний, нужно положить все левые части (производные) равными нулю. Система дифференциальных уравнений превратится в систему линейных алгебраических уравнений. Совместно с условием

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$.

Запишем алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний в "схеме гибели и размножения".

Для первого состояния $S_1$ имеем:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 .$$

Для второго состояния $S_2$ суммы членов, соответствующих входящим и выходящим стрелкам, равны:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 .$$

Но, в силу предыдущего равенства, можно сократить справа и слева равные друг другу члены $\lambda_{12} p_1$ и $\lambda_{21} p_2$, получим:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3$$

и далее, совершенно аналогично:

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4$$

. . . . . .

Таким образом, для схемы гибели и размножения члены, соответствующие стоящим друг над другом стрелкам, равны между собой:

$$\lambda_{k-1} p_k = \lambda_{k,k-1} p_k ,$$

где $k$ принимает все значения от 2 до n.

Итак, предельные вероятности состояний $p_1, p_2, ..., p_n$ в любой "схеме гибели и размножения" удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_{12}p_1=\lambda_{21}p_2\\ \lambda_{23}p_2=\lambda_{32}p_3\\ \lambda_{34}p_3=\lambda_{43}p_4,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_{n-1}p_{n-1}=\lambda_{n,n-1}p_n\\ \text{и нормировочному условию:}\\ p_1+p_2+\ldots+p_n=1.\end{array}\right\}$$

Решим эту систему. Из первого уравнения системы выразим $p_2$ через $p_1$:

$$p_2=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}p_1,$$

из второго уравнения, с учетом полученного, выразим $p_3$:

$$p_3=\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}}p_2=\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}}p_1,$$

и вообще:

$$p_k=\frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\ldots\lambda_{21}}p_1.$$

Эта формула справедлива для любого k от 2 до n. Итак, все вероятности $p_2, p_3, \ldots, p_n$ выражены через $p_1$. Подставив эти выражения в нормировочное условие, получим:

$$p_1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}p_1+\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}}p_1+\ldots+\frac{\lambda_{n-1,n}\lambda_{n-2,n-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\lambda_{n-1,n-2}\ldots\lambda_{21}}p_1=1,$$

откуда

$$p_1=\frac{1}{1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1,n}\lambda_{n-2,n-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\lambda_{n-1,n-2}\ldots\lambda_{21}}}.$$

Остальные вероятности выражаются через $p_1$:

$$\left.\begin{array}{l} p_2 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, \\ p_3 = \dfrac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \dfrac{\lambda_{n-1,n}\lambda_{n-2,n-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{1,n-1}\lambda_{n-1,n-2}\ldots\lambda_{21}} p_1 \end{array}\right\}$$

Таким образом, задача "гибели и размножения" решена в общем виде: найдены предельные вероятности состояний.

**Пример 1.**

Прибор состоит из трех узлов; поток отказов – простейший, среднее время безотказной работы каждого узла равно $\bar{t}_б$. Отказавший узел сразу начинает ремонтироваться; среднее время ремонта (восстановления) узла равно $\bar{t}_р$; закон распределения этого времени показательный (поток восстановлений – простейший). Найти среднюю производительность прибора, если при трех работающих узлах она равна 100%, при двух – 50%, а при одном и менее – прибор вообще не работает.

*Решение.*

Состояние системы нумеруем по числу неисправных узлов:

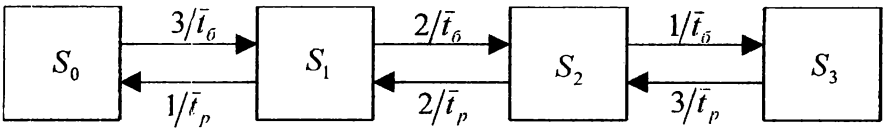
$S_0$ – все три узла исправны;

$S_1$ – один узел отказал (восстанавливается), два исправны;

$S_2$ – два узла восстанавливаются, один исправен;

$S_3$ – все три узла восстанавливаются.

Построим граф системы и разметим его. Так как поток отказов каждого узла – простейший, то промежуток времени между отказами в этом потоке распределен по показательному закону с параметром $\lambda = \dfrac{1}{\bar{t}_б}$, где $\bar{t}_б$ – среднее время безотказной работы узла:




По стрелкам вправо систему переводят отказы. Если система находится в состоянии $S_0$, то работают три узла; каждый из них подвергается потоку отказов с интенсивностью $1/\bar{t}_б$, значит, поток отказов, действующий на всю систему, в три раза интенсивнее $\lambda_{01} = \frac{3}{\bar{t}_б}$.

Если система находится в состоянии $S_1$, то работают два узла; общий поток отказов имеет интенсивность $\lambda_{12} = 2/\bar{t}_б$. Аналогично $\lambda_{23} = 1/\bar{t}_б$.

По стрелкам влево систему переводят ремонты (восстановления). Среднее время восстановления узла равно $\bar{t}_р$, значит, интенсивность потока восстановлений, действующего на восстанавливаемый узел, равна $\mu = 1/\bar{t}_р$, на два узла – $2/\bar{t}_р$, на три узла – $3/\bar{t}_р$. Эти значения $\lambda_{10}, \lambda_{21}, \lambda_{32}$ и проставлены у стрелок, ведущих влево на графе состояний системы.

Пользуясь полученным ранее общим решением задачи гибели и размножения, имеем (ставя $p_0$ вместо $p_1$):

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3\left(\frac{\bar{t}_р}{\bar{t}_б}\right) + 3\left(\frac{\bar{t}_р}{\bar{t}_б}\right)^2 + \left(\frac{\bar{t}_р}{\bar{t}_б}\right)^3};$$

$$p_1 = 3\left(\frac{\bar{t}_р}{\bar{t}_б}\right) p_0;$$

$$p_2 = 3\left(\frac{\bar{t}_р}{\bar{t}_б}\right)^2 p_0;$$

$$p_3 = \left(\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б}\right)^3 p_0.$$

Зададимся конкретными значениями $\bar{t}_б = 10$ (час.), $\bar{t}_p = 5$ (час.).

Тогда $\frac{\bar{t}_p}{\bar{t}_б} = 0{,}5$ и $p_0 = \frac{1}{1+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{27}$; $p_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{8}{27} = \frac{12}{27}$;

$p_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{27} = \frac{6}{27}$; $p_3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{27} = \frac{1}{27}$.

Средняя производительность прибора в установившемся режиме:

$$100\%p_0 + 50\%p_1 = \left(\frac{8}{27} + \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{27}\right)\cdot 100\% = 51{,}9\%$$ номинала.

**Пример 2.**

На автозаправочной станции 1 колонка. Площадка при станции допускает пребывание в очереди двух машин; если она занята, то прибывшая к станции машина проезжает мимо. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность 0,2 (машин в минуту). Процесс заправки продолжается в среднем 10 минут. Определить вероятность отказа.

*Решение.*

Запишем состояния системы (заправочной станции):

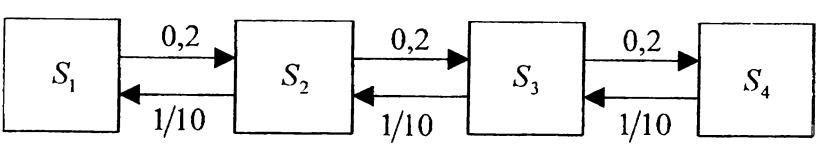
$S_1$ – система свободна;

$S_2$ – система занята, очереди нет;

$S_3$ – система занята, в очереди 1 машина;

$S_4$ – система занята, в очереди 2 машины.

Построим граф системы и разметим его:




По стрелкам вправо систему переводят приходящие для заправки машины с интенсивностью 0,2. По стрелкам влево систему переводят заправившиеся машины. Среднее время заправки равно 10, следовательно, интенсивность этого потока равна 1/10.

Пользуясь полученным ранее общим решением задачи гибели и размножения, имеем:

$$p_1 = \frac{1}{1+(0{,}2:0{,}1)+(0{,}2:0{,}1)^2+(0{,}2:0{,}1)^3},$$

$$p_2 = (0{,}2:0{,}1)p_1,$$

$$p_3 = (0{,}2:0{,}1)^2 p_1,$$

$$p_4 = (0{,}2:0{,}1)^3 p_1.$$

Таким образом,

$$p_1 = \frac{1}{1+2+4+8} = \frac{1}{15},$$

$$p_2 = 2 \cdot p_1 = \frac{2}{15},$$

$$p_3 = 4 \cdot p_1 = \frac{4}{15},$$

$$p_4 = 8 \cdot p_1 = \frac{8}{15}.$$

Машина, прибывшая для заправки, получает отказ, если система находится в состоянии $S_4$, т.е.

$$p_{отк} = p_4 = \frac{8}{15}.$$

Итак, чуть больше половины желающих заправиться проедут мимо.

---

Знаком (**) отмечены материалы для хорошо успевающих студентов.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. *Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.*

*2. Решите следующие задачи. Данные своей задачи возьмите из таблицы №1 по номеру, соответствующему вашему порядковому номеру в группе.*

1) Двумерная случайная величина $(X,Y)$ имеет плотность вероятности:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, ограниченный прямыми

$$x=0, x=a, y=0, y=b.$$

2)** Система двух случайных величин $(X,Y)$ равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $y=x, y=c, x=d$.

Найти: 1) $MX, MY, DX, DY$ ; 2) коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$ ; 3) записать выражение для двумерной плотности системы.

3) Определить плотность вероятности системы двух положительных случайных величин $X, Y$ по заданной функции распределения:

$$F(x, y) = (1 - e^{ax})(1 - e^{by}).$$

4) Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и нормально распределены с $MX = MY = 0$, $DX = DY = d^2$.

Найти вероятность того, что случайная точка $(X, Y)$ попадет в кольцо:

$$\{(x, y) : c^2 \le x^2 + y^2 \le d^2\}.$$

5) Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднеквадратическое отклонение которой равно $N$ тыс. литров. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того,

что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на $M$ тыс. литров.

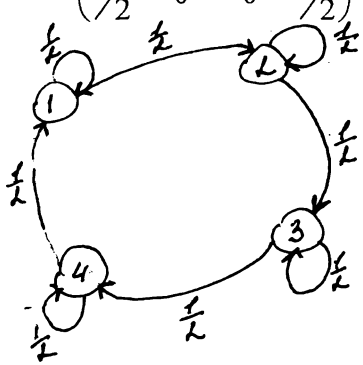
6) В механическом цехе работают $K$ токарей. Вероятность того, что токарю потребуется резец данного типа, равна $p$. Сколько резцов данного типа должна иметь инструментальная кладовая, чтобы потребность в них была обеспечена с вероятностью 0,95?

7) Прибор состоит из двух элементов – основного и резервного, работающих параллельно. Поток отказов – простейший с интенсивностью $\lambda$. Отказавший элемент сразу начинают ремонтировать, среднее время ремонта $\bar{t}$. Поток восстановлений – простейший.

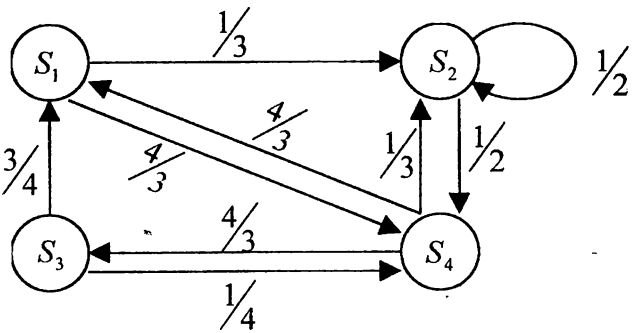
Найти вероятность безотказной работы прибора (т.е. его надежность), если прибор работает, когда работает хотя бы один элемент.

8) Нарисуйте граф состояний для марковской цепи, вероятности перехода которой заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



9) Напишите матрицу вероятностей перехода для цепи Маркова, соответствующую графу состояний:




$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 4/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица №1

| № вари-антов | Данные к задачам | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | №1 | | №2 | | №3 | | №4 | | №5 | | №6 | | №7 | |
| | *a* | *b* | *c* | *d* | *a* | *b* | *c* | *d* | *N* | *M* | *K* | *p* | $\lambda$ | *i* |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 6 | 6 | 3 | 9 | 17 | 12 | 170 | 0,1 | 0,6 | 28 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 9 | 1 | 1 | 2 | 10 | 25 | 100 | 0,2 | 0,1 | 10 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 2 | 9 | 2 | 1 | 3 | 11 | 25 | 110 | 0,2 | 0,1 | 11 |
| 4 | 1 | 4 | 0 | 3 | 9 | 3 | 1 | 4 | 12 | 25 | 120 | 0,2 | 0,1 | 12 |
| 5 | 1 | 5 | 0 | 4 | 9 | 4 | 1 | 5 | 13 | 26 | 130 | 0,2 | 0,1 | 13 |
| 6 | 2 | 1 | 3 | 5 | 9 | 2 | 0 | 6 | 14 | 26 | 140 | 0,2 | 0,1 | 14 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 9 | 6 | 1 | 7 | 15 | 26 | 150 | 0,2 | 0,2 | 10 |
| 8 | 2 | 3 | 1 | 2 | 9 | 7 | 1 | 8 | 16 | 27 | 160 | 0,2 | 0,2 | 11 |
| 9 | 2 | 4 | 1 | 3 | 9 | 8 | 1 | 9 | 17 | 27 | 170 | 0,2 | 0,2 | 12 |
| 10 | 2 | 5 | 1 | 4 | 9 | 9 | 5 | 6 | 18 | 27 | 180 | 0,2 | 0,2 | 13 |
| 11 | 3 | 1 | 1 | 5 | 8 | 1 | 5 | 7 | 19 | 28 | 190 | 0,2 | 0,2 | 14 |
| 12 | 3 | 2 | 2 | 1 | 8 | 2 | 5 | 8 | 20 | 28 | 200 | 0,2 | 0,3 | 15 |
| 13 | 3 | 3 | 2 | 2 | 8 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 100 | 0,3 | 0,3 | 16 |
| 14 | 3 | 4 | 2 | 3 | 8 | 4 | 4 | 6 | 11 | 15 | 110 | 0,3 | 0,3 | 17 |
| 15 | 3 | 5 | 2 | 4 | 8 | 5 | 4 | 7 | 12 | 15 | 120 | 0,3 | 0,3 | 18 |
| 16 | 4 | 1 | 2 | 5 | 8 | 6 | 4 | 8 | 13 | 16 | 130 | 0,3 | 0,3 | 19 |
| 17 | 4 | 2 | 3 | 1 | 8 | 7 | 4 | 9 | 14 | 16 | 140 | 0,3 | 0,4 | 20 |
| 18 | 4 | 3 | 3 | 2 | 8 | 8 | 2 | 3 | 15 | 16 | 150 | 0,3 | 0,4 | 15 |
| 19 | 4 | 4 | 3 | 3 | 7 | 1 | 2 | 4 | 16 | 17 | 160 | 0,3 | 0,4 | 16 |
| 20 | 4 | 5 | 3 | 4 | 7 | 2 | 2 | 5 | 17 | 17 | 170 | 0,3 | 0,4 | 17 |
| 21 | 5 | 1 | 3 | 5 | 7 | 3 | 2 | 6 | 18 | 17 | 180 | 0,3 | 0,4 | 18 |
| 22 | 5 | 2 | 4 | 1 | 7 | 4 | 2 | 7 | 19 | 18 | 190 | 0,3 | 0,5 | 19 |
| 23 | 5 | 3 | 4 | 2 | 7 | 5 | 2 | 8 | 20 | 18 | 200 | 0,3 | 0,5 | 20 |
| 24 | 5 | 4 | 4 | 3 | 7 | 6 | 2 | 9 | 10 | 10 | 100 | 0,1 | 0,5 | 21 |
| 25 | 5 | 5 | 4 | 4 | 7 | 7 | 5 | 9 | 11 | 10 | 110 | 0,1 | 0,5 | 22 |
| 26 | -1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 1 | 3 | 4 | 12 | 10 | 120 | 0,1 | 0,5 | 23 |
| 27 | -1 | 2 | 5 | 1 | 6 | 2 | 3 | 5 | 13 | 11 | 130 | 0,1 | 0,6 | 24 |
| 28 | -1 | 3 | 5 | 2 | 6 | 3 | 3 | 6 | 14 | 11 | 140 | 0,1 | 0,6 | 25 |
| 29 | -1 | 4 | 5 | 3 | 6 | 4 | 3 | 7 | 15 | 11 | 150 | 0,1 | 0,6 | 26 |
| 30 | -1 | 5 | 5 | 4 | 6 | 5 | 3 | 8 | 16 | 12 | 160 | 0,1 | 0,6 | 27 |

# ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

## 1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 1

### Задание

Записать плотность распределения случайной величины $Y = X_1 + 2X_2 + 3$, если случайные величины $X_1$ и $X_2$ имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1, а их коэффициент корреляции $r_{12} = 1$.

### Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

| № п/п | Алгоритм | Конкретное соответствие заданному алгоритму |
|---|---|---|
| 1 | Вычислить математическое ожидание величины $Y$: $m_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b$ | По условию задачи: $n = 2$; $m_1 = 0$; $m_2 = 0$; $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $b = 3$, поэтому $m_Y = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$ |
| 2 | Вычислить дисперсию величины $Y$: $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j$ | По условию задачи: $n = 2$; $\sigma_1 = 1$; $\sigma_2 = 1$; $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $r_{12} = 1$, поэтому $\sigma_Y^2 = 1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 9$ |
| 3 | Записать плотность распределения величины $Y$: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}$ | $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} e^{-\frac{(y-3)^2}{18}}$ |

**Решите самостоятельно следующие задачи.**

**Задача 1.1**

Независимые случайные величины $X_1$ и $X_2$ распределены нормально, $MX_1 = 2, DX_1 = 4$; $MX_2 = -3, DX_2 = 9$.

Записать плотность распределения

$$Y = 2X_1 + 3X_2 - 1.$$

**Задача 1.2**

Тело взвешивается на аналитических весах. Истинное значение веса нам неизвестно. Вследствие наличия ошибок результат взвешивания случаен и распределяется по нормальному закону с параметрами $m$ и $\sigma$. Систематической ошибки аналитические весы не имеют. Чтобы избежать ошибок взвешивания, пользуются следующим приемом: взвешивают тело n раз и в качестве приближенного значения веса берут среднее арифметическое результатов n взвешиваний:

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Определить плотность распределения случайной величины $Y$.

### Задача 1.3

Случайные ошибки измерения прибора независимы и распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 5 см и средним квадратическим отклонением 0,1 см. Найти плотность распределения ошибки, возникающей при измерении некоторого расстояния, если известно, что для этого надо произвести три измерения данным прибором и берется среднее арифметическое.

### Задача 1.4

Найти плотность распределения суммы четырех нормально распределенных случайных величин с параметрами 0 и 1, если известно, что эти величины имеют одинаковый коэффициент корреляции, равный 0,5.

**Задача 1.5**

Вес цемента, упакованного автоматом в бумажный мешок, есть случайная нормально распределенная величина с математическим ожиданием $m = 50\ кг$ и дисперсией $\sigma^2 = 4\ кг^2$. Найти плотность распределения суммарного веса 10 мешков.

## 2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2

### Задание

Определить вероятность того, что при подбрасывании игральной кости 120 раз больше 20 раз выпадет 6 очков.

### Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

| № п/п | Алгоритм | Конкретное соответствие заданному алгоритму |
|---|---|---|
| 1 | Описать схему Бернулли в данной задаче | Опыт состоит в подбрасывании игральной кости, "успех" – выпадение 6 очков |
| 2 | Определить из условия задачи параметры распределения величины $X$ | $n=120;\ p=\frac{1}{6};\ q=\frac{5}{6}$<br>$k_1=20;\ k_2=120$ |
| 3 | Проверить применимость теоремы Муавра-Лапласа:<br>$npq>9$ | $npq=120\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\approx 16{,}7>9$ |
| 4 | Вычислить искомую вероятность по формуле:<br>$p(k_1<X<k_2)\approx$<br>$\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$ | $p(20<X<120)\approx$<br>$\approx\Phi\left(\frac{120-20}{\sqrt{16{,}7}}\right)-\Phi\left(\frac{20-20}{\sqrt{16{,}7}}\right)=$<br>$=\Phi(25)-\Phi(0)=\frac{1}{2}$ |

**Решите самостоятельно следующие задачи.**

### Задача 2.1

В результате проверки качества зерна, приготовленного для посева, установлено, что всхожи 90% зерен. Определить вероятность того, что среди 600 произвольно взятых зерен прорастут более 500.

## Задача 2.2

Вероятность разладки станка в течение рабочей смены равна 0,3. Найти вероятность того, что на предприятии, на котором имеется 250 станков, к концу рабочей смены будет разлажено не более 50 станков.

## Задача 2.3 ✓

Читальный зал института рассчитан на 300 студентов, каждый из которых с вероятностью 0,2 берет на абонементе англо-русский словарь. На абонементе 20 таких словарей. Какова вероятность того, что желающих взять словарь будет больше, чем количество имеющихся словарей?

### Задача 2.4

Вероятность того, что пара обуви, взятая наудачу из изготовленной партии, окажется первого сорта, равна 0,4. Определить вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется не менее половины первого сорта.

### Задача 2.5

Сдается 400-квартирный дом. Вероятность того, что в одной квартире будут обнаружены строительные недоделки, равна 0,2. Найти вероятность того, что недоделки будут обнаружены не более чем в 50 квартирах.

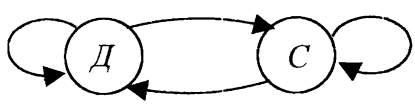
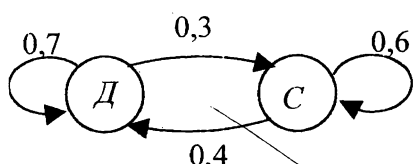
## 3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 3

### Задание

Погода в некотором регионе через длительные периоды времени становится то дождливой, то сухой. Если идет дождь, то с вероятностью 0,7 он будет идти на следующий день; если в какой-то день сухая погода, то с вероятностью 0,6 она сохранится и на следующий день. Известно, что в среду погода была дождливая. Какова вероятность того, что она будет дождливой в ближайшую пятницу?

### Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

| № п/п | Алгоритм | Конкретное соответствие заданному алгоритму |
|---|---|---|
| 1 | Записать все состояния цепи Маркова в данной задаче | Д – погода дождливая<br>С – погода сухая |
| 2 | Построить граф состояний |  |
| 3 | Разметить граф состояний переходными вероятностями |  |
| 4 | Составить матрицу вероятностей перехода | $$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ Д \\ С \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Д & С \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \end{array}$$ |
| 5 | Вычислить по матрице искомые вероятности | $p = P(Д_{пят.} / Д_{ср.}) =$<br>$= P(Д_{пят.} / Д_{четв.}) P(Д_{четв.} / Д_{ср.}) +$<br>$+ P(Д_{пят.} / С_{четв.}) P(С_{четв.} / Д_{ср.}) =$<br>$= 0,7 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,61$ |

**Решите самостоятельно следующие задачи.**

### Задача 3.1 ✓

Автомашина может находиться в одном из четырех состояний:
- исправна;
- неисправна, осматривается;
- ремонтируется;
- списана.

Если машина исправна, то с вероятностью 0,8 она может сломаться; если машина неисправна, то она с вероятностью 0,7 ремонтируется или с вероятностью 0,3 списывается; если же машина ремонтируется, то она с вероятностью 0,6 становится исправной, либо с вероятностью 0,4 продолжает ремонтироваться. Остальные переходы считать невозможными. Найти вероятность того, что машина будет исправна в субботу, если известно, что она была исправна в среду.

### Задача 3.2

В некоторой местности климат весьма изменчив. Здесь никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня снег (или дождь), то с вероятностью 1/2 погода не изменится. Если все же она изменится, то в половине случаев снег заменяется дождем или наоборот и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Определить вероятность хорошей погоды через три дня после дождя.

## Задача 3.3

Предположим, что мужчин можно разделить по их профессиям на работников умственного труда, квалифицированных рабочих и неквалифицированных рабочих. Допустим, что 80% сыновей работников умственного труда становятся работниками умственного труда, 10% становятся квалифицированными рабочими и 10% – неквалифицированными рабочими. Пусть из сыновей квалифицированных рабочих 60% становятся квалифицированными рабочими, 20% – работниками умственного труда и 20% – неквалифицированными рабочими. Наконец, 50% сыновей неквалифицированных рабочих пусть будут квалифицированными рабочими и по 25% пусть приходится на долю других категорий. В предположении, что каждый мужчина имеет одного сына, построить цепь Маркова с тремя состояниями, чтобы проследить за несколькими поколениями какой-либо семьи. Выпишите матрицу вероятностей перехода. Найти вероятность того, что внук неквалифицированного рабочего станет работником умственного труда.

## Задача 3.4

В задаче 3.3 предполагалось, что у каждого мужчины есть сын. Теперь допустим, что для мужчины вероятность иметь сына равна 0,8. Образуем марковскую цепь с четырьмя состояниями. Первые три состояния пусть будут те же, что и в задаче 3.3, а четвертое состояние отвечает случаю, когда мужчина не имеет сына, и процесс на этом кончается. Это состояние представляет те семьи, в которых мужская линия вымерла. Выпишите матрицу вероятностей перехода и найдите вероятность того, что внук неквалифицированного рабочего будет работником умственного труда.

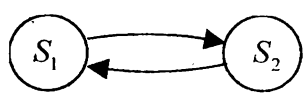
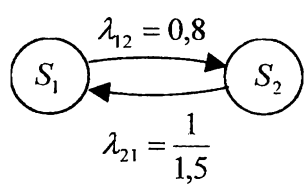
## 4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 4

### Задание

На телефонную линию приходят вызовы с интенсивностью 0,8 (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора 1,5 мин. Все потоки событий – простейшие. Определить вероятность отказа $P_{отк.}$

### Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное содержание.

| № п/п | Алгоритм | Конкретное соответствие заданному алгоритму |
|---|---|---|
| 1 | Построить граф состояний | $S_1$ – линия свободна<br>$S_2$ – линия занята<br>  |
| 2 | Разметить граф состояний плотностями вероятностей перехода |  |
| 3 | Записать по размеченному графу состояний выражения для предельных вероятностей состояний | $p_2 = \frac{0{,}8}{1/1{,}5} p_1; p_1 = \frac{1}{1 + \frac{0{,}8}{1/1{,}5}}$ |
| 4 | Вычислить предельные вероятности состояний | $P_{отк.} = p_2 = 0{,}8 \cdot 1{,}5 \frac{1}{1 + 0{,}8 \cdot 1{,}5} =$<br>$= \frac{1{,}2}{2{,}2} \approx 0{,}545$ |

**Решите самостоятельно следующие задачи.**

### Задача 4.1

На автозаправочной станции две колонки. Площадка при станции допускает пребывание в очереди 1 машины; если она занята, то прибывшая к станции машина проезжает мимо. Поток машин, прибывающий для заправки, имеет интенсивность 0,2 (машины в минуту). Процесс заправки продолжается в среднем 5 минут. Определить вероятность отказа (т.е. вероятность того, что машина, прибывшая к станции для заправки, проедет мимо).

### Задача 4.2

На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью 2 (состава в час). Среднее время, в течение которого горка обрабатывет состав, равно 0,4 часа. Составы, прибывшие в момент, когда горка занята, отправляются в другое место. Определить вероятность того, что прибывший состав будет разгружен на данной горке.

### Задача 4.3

Поток отказов данного прибора простейший, с интенсивностью $\lambda$, среднее время ремонта (восстановления) равно $\bar{t}$. Чему равна вероятность безотказной работы прибора, если поток восстановлений также простейший.

**Задача 4.4**

В телефонное справочное бюро поступают запросы с интенсивностью 3 (за минуту), среднее время ответа на вопрос 1 мин. Какова вероятность дозвониться и получить справку с первого раза, если параллельно работают три телефонистки?

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Объем 7,5 п.л. Тираж 302